المحاضرة الخامسة

تحليل عددي

طريقة النقطة الثابتة للتكرار (الطريقة التكرارية للتقريبات المتتالية):

تعتمد هذه الطريقة على استبدال المعادلة المدروسة بمعادلة مكافئة على الصورة:

$$x = g(x)$$

حيث g دالة جديدة في x نسميها الدالة التكرارية.

والملاحظ أنه يمكن وضع أي معادلة $f(x)=0$ في هذه الصورة الخاصة بعدد لانهائي من الطرق:

مثال: ان المعادلة:

$$x^3 - 2 = 0 \quad (1)$$

تكافئ، أياً من المعادلات التالية:

1) $x = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0$

2) $x = x^3 - 2 + x$

3) $x = \frac{2 - x^3 + 5x}{5}$

يتم اختيار طريقة وضع المعادلة المطلوب حلها من هذا العدد اللانهائي منها للاّ في الصورة الخاصة $x = g(x)$

بحيث يؤدي الحل النهائي بطريقة النقطة الثابتة الى نهاية (تقارب) نحو الجذر المطلوب، بينما قد يؤدي اختيار آخر الى تباعد.

شرح الطريقة :

نفرض أن لدينا المعادلة المكافئة في الشكل :

$$x = g(x)$$

حيث $g(x)$ دالة جديدة نسميها التكرار

ثم نختار x_0 تقريب أول للجذر وبالتعويض في الدالة الجديدة $g(x)$ نحصل على قيمة نسميها x_1 :

أي $x_1 = g(x_0)$

ثم نعوض مرة أخرى في الدالة $g(x)$ بالقيمة x_1 فنحصل على قيمة نسميها x_2 أي $x_2 = g(x_1)$

وهكذا نتابع نحصل على المعادلة التكرارية :

$$x_{n+1} = g(x_n) \; ; \; n = 0, 1, 2, \dots$$

وبالتالي نحصل على المتتالية العددية :

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\ldots$$

فاذا تقاربت هذه المتتالية الى القيمة ξ (عندما تنتهي $n \to \infty$) ، فان الدالة $g(x_n)$ تنتهي الى $g(\xi)$ أي أن :

$$\xi = g(\xi)$$

وبالتالي فان ξ هي أحد جذور المعادلة

$$f(x) = 0 .$$

تقارب طريقة النقطة الثابتة :

نظرية القيمة الوسطى : اذا كانت الدالة $g(x)$ ومشتقتها $g'(x)$ متصلتين في المجال $[a,b]$ عندئذ توجد قيمة واحدة على الأقل ξ بحيث $a < \xi < b$:

$$g'(\xi) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \begin{cases} |g'(\xi)| < 1 & \text{تقارب} \\ |g'(\xi)| > 1 & \text{تباعد} \end{cases}$$

مثال: أوجدي الجذر الموجب للمعادلة:

① $f(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$

بطريقة التقريبات المتتالية (طريقة النقطة الثابتة) في المجال $[3,5]$

الحل:

$f(3) = -5 < 0 \quad , f(5) = 7 > 0$

هذا يعني أن $f(3) \cdot f(5) < 0$

وبالتالي فان الجذر الموجب موجود في الفترة $[3,5]$.

نختار دالة التكرار من الشكل:

$$x = g(x) = \sqrt{2x+8}$$

$x = \sqrt{2x+8} \Longrightarrow x^2 = 2x + 8 \Rightarrow ①$

$$g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+8}} = \frac{1}{\sqrt{2x+8}}$$

$|g'(x)| < 1 \; ; \forall x \in [3,5]$

أي أن شرط تقارب طريقة التكرار محقق

نختار $x_0 = 5$ ونطبق العلاقة:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

نجد:

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{2x_0 + 8} = \sqrt{2(5)+8}$$

$$x_1 = \sqrt{18} = 4.243$$

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt{2x_1 + 8} = \sqrt{2(4.243)+8}$$

$$x_2 = 4,060$$

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt{2(4.060)+8} = 4,015$$

$$x_4 = g(x_3) = \sqrt{2(4,015)+8} = 4,004$$

$$x_5 = g(x_4) = \sqrt{16,007} = 4,001$$

$$x_6 = g(x_5) = \sqrt{16,001} = 4,000$$

- نتوقف عندما يتحقق الشرط $|x_i - x_0| = 1$

خطأ نسبي $|x_6 - x_0| = |4-5| = 1$

الخطأ المطلق: $\frac{|x_6 - x_0|}{x_0} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

لو افترضنا

$$x = g(x) = \frac{2x+8}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2x - 2x - 8}{x^2} = \frac{-8}{x^2}$$

$$|g'(x)| = \frac{8}{x^2} < 1 \quad ; \quad \forall x \in [3,5]$$

أي انه شرط التقارب محقق.

نختار $x_0 = 5$ مثلاً ح.

$$x_1 = g(x_0) = \frac{2x_0+8}{x_0} = \frac{2(5)+8}{5} = 3.600$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{2x_1+8}{x_1} = 4.222$$

$$x_3 = g(x_2) = 3.895 \; ?$$

$$x_4 = g(x_3) = 4.054$$

$x_5 = g(x_4) = 3.973$, $x_6 = 4.014$

$x_7 = 3.998$, $x_8 = 4,004$

$x_9 = 3.998$ $x_{10} = 4,001$

$$x_{11} = g(x_{10}) = 4,000$$

سنختار الآن دالة التكرار بالشكل:

$$x = g(x) = \frac{x^2 - 8}{2} = \frac{1}{2}x^2 - 4$$

$$g'(x) = x$$

$$|g'(x)| = |x| > 1 \quad \forall x \in [3, 5]$$

هنا يعني أن المتتالية التي نحصل عليها

بتطبيق العلاقة $x_{n+1} = g(x_n)$

ستكون متباعدة ولنتأكد.

نختار $x_0 = 5$ نجد:

$$x_1 = g(x_0) = \frac{5^2 - 8}{2} = \frac{25 - 8}{2} = 8.500$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{(8.5)^2 - 8}{2} = 32.125$$

$$x_3 = g(x_2) = 512.008$$

واضح التباعد.

الجذور المتعددة :

تعريف: يقال عن الدالة $f(x)$ أن لها جذر r من التعدد m اذا كان يمكن كتابة $f(x)$ في الصورة :

$$f(x) = (x-r)^m \cdot h(x)$$

حيث $\lim_{x \to r} h(x) \neq 0$

ملاحظة : الجذر من التعدد $m=1$ يسمى جذر بسيط ، والجذر من التعدد $m>1$ يسمى جذر متعدد.

نظرية : العدد r يكون جذر من التعدد m للدالة $f(x)$ اذا وفقط اذا كان

$$f(r) = f'(r) = \dots = f^{(m-1)}(r) = 0$$

مثال: بين أن:

$$f(x) = e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2$$

لها جذر من التعدد 3 عند $r=0$

الحل:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2 - 4x$$

$$f''(x) = 4e^{2x} - 4$$

$$f'''(x) = 8e^{2x}$$

نلاحظ أن:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad , \quad f'''(0) = 8 \neq 0$$

اذن النظرية محققة وبالتالي نستطيع أن نتأكد أن للدالة $f(x)$ جذر من التعدد 3 عند $r=0$.

طريقة ثانية بالاعتماد على التعريف:

سنعيد كتابة $f(x)$ بالشكل:

$$f(x) = (x-0)^3 \underbrace{\frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}}_{h(x)}$$

يكفي أن نتحقق أنه $\lim_{x \to 0} h(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3} = \frac{0}{0}$$

بما أن الجواب $\frac{0}{0}$ عدم تعيين لذلك نتابع
حساب النهاية بطريقة أوبيتال فنجد:

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}-2-4x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال مرة ثانية:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4e^{2x}-4}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{8e^{2x}}{6}$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \neq 0$$