تكملة

التفاضل العددي

المحاضرة التاسعة

أ. د جمرود

تحليل عددي _ حاسب

الهدف الرئيسي من التفاضل العددي هو ايجاد قيم التفاضلات التي يصعب الحصول عليها بالطرق التحليلية. بفرض أن $y=f(x)$ دالة معطاة قيمها في جدول :

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$$x_{i+1}-x_i=h \quad \forall\, i=0,1,2,\ldots$$

نميز حالتين:

١ - اذا كان المطلوب حساب قيمة مشتق الدالة $y=f(x)$ عند احدى النقط x_i $i=0,1,2,\dots$ فان المسألة هي مسألة تفاضل.

٢ - اذا كان المطلوب حساب قيمة مشتق الدالة $y=f(x)$ عند نقطة واقعة بين x_i فالحالة هي مزيج من التفاضل والتكامل.

صيغ عددية للمشتقات عند نقطة جدولية

سنتعرف على ثلاث صيغ ويمكن استنتاجها الاعلاقات تايلور:

صيغة الفروق المركزية :

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

صيغة الفروق التقدمية (الأمامية)

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

صيغة الفروق التراجعية (الخلفية)

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

مثال: بفرض $y=f(x)=\sin x$

دالة حيث

$x\in[0,7, 1,3]$

احسبي مشتقة الدالة $y=\sin x$

عند النقطة $x=1$ مستخدمة

الصيغ الثلاث السابقة ثم احسبي

3) الخطأ المرتكب [illegible]

[illegible]

x	0,7	0,8	0,9
$f(x)=$ sinx	0,644217	0,717356	0,783327

$h = 0,8 - 0,7 = 0,1$ اختياري

1,0	1.1	1,2	1,3
0,841471	0,891207	0,932039	0,96355

لنحسب قيمة مشتق الدالة $y = \sin x$ عند

النقطة $x = 1$

١ - باستخدام صيغة الفروق المركزية :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$h = 0,8 - 0,7 = 0,1 \quad , x_0 = 1$$

$$f'(1) = \frac{f(1,1) - f(0,9)}{2(0,1)}$$

(4)

$$= \frac{0,891207 - 0,783327}{0,2} = \boxed{0,53940}$$

2 _ باستخدام صيغة الفروق التقدمية:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(1+0,1)-f(1)}{0,1}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(1,1)-f(1)}{(0,1)} = \frac{0,891207-0,8414}{0,1}$$

$$f'(x_0) = \boxed{0,497364}$$

3 - باستخدام صيغة الفروق الراجعة:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \frac{f(1)-f(0,9)}{0,1}$$

$$f'(1) = \frac{0,841471-0,783327}{0,1}$$

$$f'(1) = \boxed{0,58144}$$

ان مشتقة الدالة $y=\sin x$ هي $y=\cos x$

$$y'(1) = \cos 1 = 0,540302 = (\sin x)'_{x=1}$$

وهي القيمة الفعلية لـ $\cos 1$.

١ - الخطأ المرتكب في تطبيق الفروق المركزية:

$e_1 = |0.1539402 - 0.1540302| = \boxed{0.0000902}$

٢ - الخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق التقدمية

$e_2 = |0.1497364 - 0.1540302| = 0.0042938$

٣ - الخطأ المرتكب في تطبيق صيغة الفروق التراجعية:

$e_3 = |0.158144 - 0.1540302| = 0.0041138$

إذاً نستنتج مما سبق بأنه

أفضل الحسابات هي التي توافق

أقل الأخطاء لذلك أفضل

تقدير هو الأول في الصيغة

المركزية

* واجب بيتي: أوجد مشتق الدالة $y = e^x$ في النقطة $x = 1$ $h =$

$[0.3 , 1.2]$

صيغ عددية للمشتقات عند نقط

ليست موجودة في جدول البيانات:

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} \; ; \; h = x_{i+1} - x_i$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0 - \cdots\right]$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 - \cdots\right]$$

$$f'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \frac{7}{4}\Delta^5 y_0 \cdots\right]$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4}\left[\Delta^4 y_0 - 2\Delta^5 y_0 + \cdots\right]$$

وهكذا

الخطأ المرتكب في حساب قيمة مشتق الدالة في نقطة بطريقة نيوتن التقدمية:

يمكن تقدير الخطأ المرتكب في حساب مشتق دالة في نقطة كما يلي:

بفرض أن $P_n(x)$ هي كثيرة الحدود الملائمة للدالة $y=f(x)$ فالخطأ المرتكب يعطى بالعلاقة:

$$e(x)=f(x)-P_n(x)$$

$$\rightarrow e'(x)=f'(x)-P'_n(x)=(-1)^n\frac{h^n}{n+1}f^{(n+1)}(x)$$

$$\rightarrow e'(x)\le(-1)^n\frac{h^n}{n+1}\operatorname{Max} f^{(n+1)}(x)$$

$$x_0 < x < x_n$$

$$x\in[x_0, x_n]$$

مثال: بفرض أن $f(x)$ معرفة بالجدول التالي

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-6	-1	16	51	110

احسب $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

بطريقة نيوتن للتقدم: بالفروق الأمامية

عند النقطة $x=1$

الحل: نشكل جدول الفروق التقدمية:

x	$y=f(x)$	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	-6	5	12	6	0
2	-1	17	18	6	
3	16	35	24		
4	51	59			
5	110				

$$h=1 \quad , \quad \alpha = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0}{1} = 0 , \quad x_0 = 1$$

بتطبيق القوانين التي تعطي الاشتقاق المتتالية السابقة نجد:

$$f'(1) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\Delta^5 y_0\right]$$

$$= \frac{1}{1}\left[5 - \frac{1}{2}(12) + \frac{1}{3}(6) - \frac{1}{4}0 + 0\right]$$

$$f'(1) = [5 - 6 + 2] = 1$$

$$f''(1) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 \ldots\right]$$

$$f''(1) = 1\,[12 - 6 + 0] = 6$$

$$f'''(1) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 \ldots\right] = 1\,[6 - 0] = 6$$

لحد الخطأ نجد

$$\operatorname{Max} f'''(x) = 6.$$

$$e'(x) \le (-1)^n \frac{h^n}{n+1} \operatorname{Max} f^{(n+1)}(x) \le (-1)^{2} \frac{1}{3}\, 6$$

$n+1 = 3 \rightarrow n = 2$ $\quad \le (-1)^2 \frac{1^2}{3} 6 = 2$ $\quad n = 2$ $\quad \le 2$

10

طالب الخطأ عن :

$$\text{Max } f'''(x) = 6$$

$$n + 1 = 3 \Longrightarrow n = 2$$

$$e'(x) \leq (-1)^{n} \frac{h^{n}}{n+1} \underline{\text{Max} f^{(n+1)}(x)}$$

$$e'(x) \leq (-1)^{2} \frac{1^{2}}{3} 6 \Rightarrow$$

$$e'(x) \leq 2$$

$$\cancel{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5}}$$