Chapter 9

الزخم (كمية التحرك الخطي)
Linear Momentum

- **الزخم (أو كمية التحرك الخطي) ($\vec{p}$):** هو حاصل ضرب كتلة الجسم m في سرعته $\vec{v}$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

وهو كمية متجهة، ويكون باتجاه السرعة. ووحدته هي "وحدة كتلة × وحدة سرعة" $\equiv kg.\,m/s$

مثال(1): جسم كتلته $m = 3\ kg$ يتحرك في اتجاه المحور x بسرعة $v = 10\ m/s$. أحسب زخم الجسم.

الحل:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$
$$= 3\times10 = 30\,kg.\,m/s \quad (\text{باتجاه المحور } x)$$

- **الدفع (I) Impulse:** اذا اثرت قوة ثابتة $\vec{F}$ على جسم فترة زمنية Δt فأن الدفع على الجسم هو حاصل ضرب القوة في الزمن:

$$\vec{I} = \vec{F}\,.(\Delta t)$$

الدفع كمية متجهة ويكون باتجاه القوة $\vec{F}$. وحدة الدفع هي "وحدة قوة × وحدة زمن" $\equiv N.s$

مثال(2): قوة مقدارها $20\ N$ اثرت أفقيا على جسم ساكن كتلته $4kg$ لمدة ثانيتين. أوجد
(أ) مقدار الدفع الناتج على الجسم.
(ب) الزخم الذي اكتسبه الجسم (Δp) خلال هذه الفترة.

الحل: (أ) الدفع: $I = F.(\Delta t) = (20N)(2s) = 40\,N.s$

(ب) الزخم الذي اكتسبه الجسم:

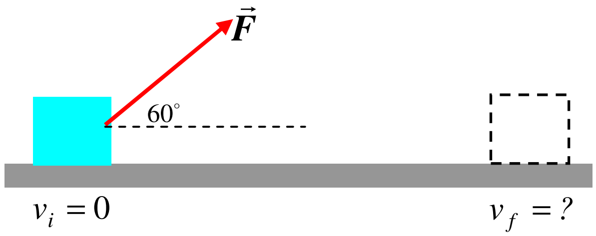
$$\Delta p = p_f - p_i$$
$$= m\,v_f - m\,v_i$$
$$= 4\times10 - 0$$
$$= 40\ kg.\,m/s$$

$$v_f = v_i + at$$
$$v_f = 0 + \frac{F}{m}t = \frac{20}{4}\times2 = 10\ m/s$$

من الفرعين (أ) و (ب) نلاحظ ان الدفع يساوي التغير في الزخم: $I = \Delta p = 40\,N.s$

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

مثال (3): جسم ساكن كتلته $3kg$ على سطح أفقي أملس، اثرت على الجسم قوة مقدارها $10N$ تميل على الافق بزاوية 60° لمدة 6s . إحسب: (أ) الدفع الحاصل على الجسم خلال هذه الفترة.
(ب) مقدار الزخم (Δp) الذي يكتسبه الجسم خلال هذه الفترة.



الحل: (أ) الدفع:

$$I = F.(\Delta t)$$
$$= (F\cos 60)(6)$$
$$= (10\times\frac{1}{2})(6) = 30\,N.s$$

(ب) الزخم المكتسب:

$$\Delta p = p_f - p_i = mv_f - \overset{\text{صفر}}{\cancel{mv_i}} = mv_f$$

$$v_f = v_i + at = 0 + \frac{\sum F}{m}.t = \frac{Fcoz60}{3}.(6) = 10\ \text{m/s}$$

$$\Delta p = 3\times 10 = 30\,kg.m/s$$

مرة أخرى نلاحظ ان الدفع يساوي التغير في الزخم: $\boldsymbol{I = \Delta p}$.

- **العلاقة بين الدفع (I) والزخم (p):**

اذا أثرت قوة ثابتة **F** على جسم كتلته m، سرعته الابتدائية $\vec{v}_i$، أكسبته تسارعا $\vec{a}$، وحولت سرعته الى $\vec{v}_f$، نجد من معادلات الحركة:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

أضرب المعادلة في m

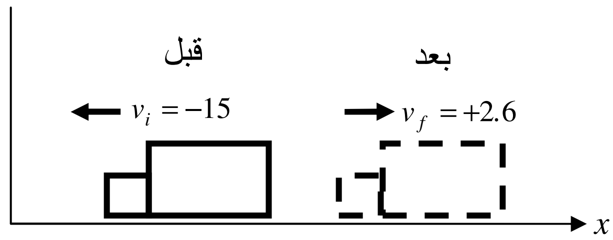
$$m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = (m\vec{a})t$$
$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{F}\,t$$

أي ان الدفع هو التغير في الزخم　　$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{I}}$

مثال (4): ضرب لاعب بلياردو كرة ساكنة كتلتها $0.2\ kg$. اذا كانت القوة المؤثرة على الكرة $F = 50N$ وأثرت على الكرة لمدة $10\ ms$، احسب السرعة التي انطلقت بها الكرة.

الحل:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$
$$F(\Delta t) = p_2 - p_1$$
$$= mv_2 - mv_1$$
$$50\times 0.010 = 0.2v_2 - 0$$
$$v_2 = 2.5\ m/s$$



مثال (5): مثال 9.4 صفحة 340

$m = 1500\,kg$

$\vec{v}_i = -15\hat{i}$

$\vec{v}_f = +2.6\hat{i}$

الفترة الزمنية أثناء التصادم: $\Delta t = 1.5$

الحل: (أ) الدفع الناتج عن التصادم:

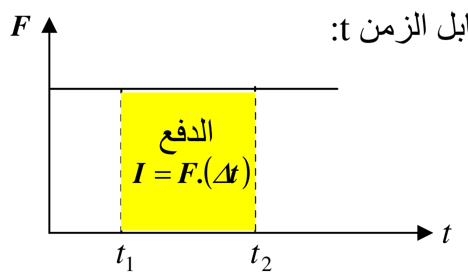
$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m(v_f - v_i) = 1500(2.6 - (-15)) = 2.64\times10^4\ kg.m/s$$

(ب) القوة التي تؤثر على السيارة:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{2.6\times10^4}{1.5} = 1.76\times10^5\ N\,\hat{i}$$

- **تمثيل الدفع بيانيا:** الشكل المجاور يوضح رسمة القوة **F** مقابل الزمن t:

المساحة تحت المنحنى تمثل الدفع $\vec{I}$ (أو $\Delta\vec{p}$).



- **حفظ الزخم Conservation of Linear Momentum**

كرتان تتحركان على خط أفقي واحد. كتلة الاولى m_1 وسرعتها $\vec{v}_1$ أما الثانية فكتلها m_2 وسرعتها $\vec{v}_2$. كما أن سرعة الاولى أكبر من سرعة الثانية ($\vec{v}_1 > \vec{v}_2$). لحقت الاولى بالثانية وصدمتها، وبعد التصادم أصبحت سرعة الاولى $\vec{v}_1'$ وسرعة الثانية $\vec{v}_2'$، كما يوضح الشكل التالي:

أثناء التصادم (وحسب قانون نيوتن الثالث) تنشأ قوتان متساويتان ومتعاكستان مما يسبب دفعين ($\vec{I} = \vec{F}t$) متساويين ومتعاكسين:

$$\vec{I}_1 = -\vec{I}_2$$

$$(\Delta\vec{p})_1 = -(\Delta\vec{p})_2$$

$$\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)$$

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\boxed{m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}$$

$$\boxed{\left(\sum \vec{P}\right)_{befor} = \left(\sum \vec{P}\right)_{after}}$$

أي أن مجموع الزخم قبل التصادم يساوي مجموع الزخم بعد التصادم. وهذا هو قانون حفظ الزخم.

مثال (6): الشكل المجاور يوضح كرتين، قبل وبعد التصادم.

إحسب سرعة الكرة الاولى بعد التصادم.

الحل: استخدم قانون حفظ الزخم:

$$\left(\sum \vec{P}\right)_{before} = \left(\sum \vec{P}\right)_{after}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$(1)(8) + (2)(3) = (1)v_1' + (2)(5)$$

$$v_1' = 4\,m/s \quad \text{(بنفس اتجاهها الاصلي)}$$

مثال (7): الشكل أدناه يوضح تصادم كرتين يتحركان باتجاهين متعاكسين. أحسب سرعة الكرة الثانية بعد التصادم.

الحل: لاحظ ان الكرتين باتجاهين متعكسين، يعني احدى السرعتين موجبة والاخرى سالبة، اعتبر v_1 سالبة.

صفر

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$(10)(-14)+(14)(6)=(1)(0)+(14)v_2'$$

$$v_2' = -4\,cm/s$$ (الاشارة السالبة تعني: بعكس اتجاهها الاصلي)

- **أنواع التصادم:**

(أ) التصادم المرن: يسمى التصادم مرنا اذا كانت طاقة الحركة محفوظة: $\Delta K = 0$
أي طاقة الحركة قبل التصادم تساوي طاقة الحركة بعد التصادم.

$$\left(\sum K\right)_{before} = \left(\sum K\right)_{after}$$

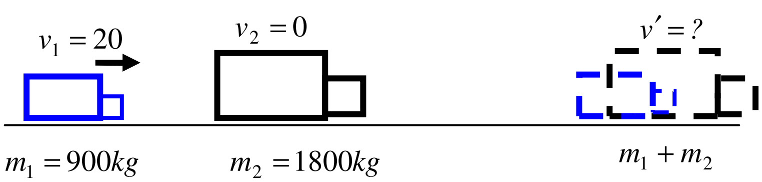
$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1 + \frac{1}{2}m_2 v_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1' + \frac{1}{2}m_2 v_2'$$

(ب) التصادم غير المرن: في هذا النوع من التصادم تكون طاقة الحركة غير محفوظة بل يحدث فقدان للطاقة. حيث عندما يتصادم جسمان يتحدان في جسم واحد وتكون طاقة الحركة غير محفوظة. مثل تصادم رصاصة بهدف وانغرازها به. الطاقة المفقودة (ΔK) في هذا التصادم هي الفرق بين طاقة الحركة قبل وبعد التصادم:

$$\Delta K = \left(\sum K\right)_{after} - \left(\sum K\right)_{before}$$

$$= \left(K_1' + K_2'\right) - \left(K_1 + K_2\right)$$



مثال (8): مثال 9.5 صفحة 342
احسب سرعة السيارتين بعد تصادمهما.

الحل: لاحظ ان السيارتين تتحدان بعد التصادم
في كتلة واحدة $(m_1 + m_2)$ وتتحركان معا بسرعة واحدة v'.

طبق قانون حفظ الزخم:
$$\left(\sum \vec{P}\right)_{before} = \left(\sum \vec{P}\right)_{after}$$

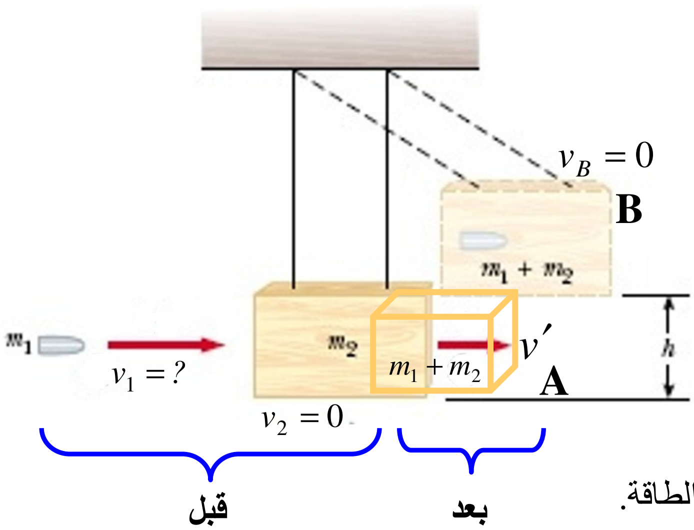
$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'$$

$$m_1 v_1 + m_2 \overset{\text{صفر}}{v_2} = (m_1 + m_2)v'$$

$$(900)(20) + 0 = (900+1800)v'$$

$$v' = 6.67\,m/s$$

مثال (9): مثال 9.6 صفحة 346
رصاصة كتلتها 15 g ، اخترقت واستقرت في قطعة خشب ساكنة كتلتها 3kg معلقة بخيط على شكل بندول. اذا ارتفعت القطعة (مع الرصاصة) مسافة $h=0.1\ m$،
أوجد ما يلي:
(أ) سرعة قطعة الخشب فور استقرار الرصاصة داخلها.
(ب) سرعة الرصاصة قبل اصطدامها بالقطعة.



الحل: لاحظ لدينا مرحلتين،
- التصادم: نطبق قانون حفظ الزخم (قبل وبعد).
- ارتفاع "القطعة+الرصاصة" من A الى B: نطبق حفظ الطاقة.

(أ) بعد التصادم، تتحرك "القطعة والرصاصة" بسرعة v' ولنجد هذه السرعة نطبق قانون حفظ الطاقة الميكانيكية (حيث النظام محافظ) وذلك بالمقارنة بين النقطتين A و B:

$$E_A = E_B$$

$$(K + \underbrace{U}_{\text{صفر}})_A = (\underbrace{K}_{\text{صفر}} + U)_B$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)g\,h$$

$$v'^2 = 2g\,h = 2\times 9.8\times 0.1 \quad\Rightarrow\quad v' = 1.96\ m/s$$

(ب) لإيجاد سرعة الرصاصة قبل التصادم، نطبق قانون حفظ الزخم:

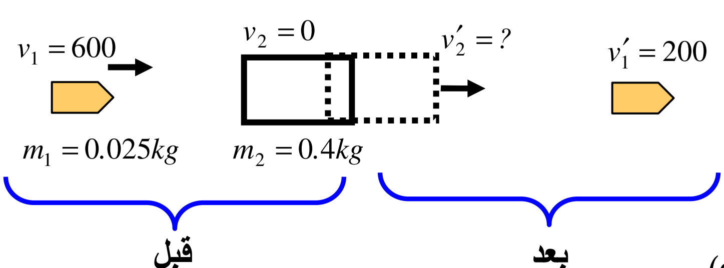
$$\left(\sum \vec{P}\right)_{befor} = \left(\sum \vec{P}\right)_{after}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'$$

$$m_1 v_1 + m_2 \underbrace{v_2}_{\text{صفر}} = (m_1 + m_2)v'$$

$$(0.015)v_1 + 0 = (0.015 + 3)\times 1.96 \qquad \Rightarrow \quad v_1 = 394\ m/s$$

مثال (10): رصاصة كتلتها 0.025 kg تتحرك أفقيا بسرعة $600\ m/s$، اخترقت قطعة خشب ساكنة كتلتها $0.4kg$ وخرجت منه بسرعة $200\ m/s$. أحسب (أ) سرعة قطعة الخشب (v_2') بعد التصادم مباشرة.
(ب) مقدار الطاقة المفقودة في هذا التصادم.



الحل: ارسم رسما مناسبا يوضح التصادم.
(أ) طبق قانون حفظ الزخم:

$$\left(\sum \vec{P}\right)_{befor} = \left(\sum \vec{P}\right)_{after}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

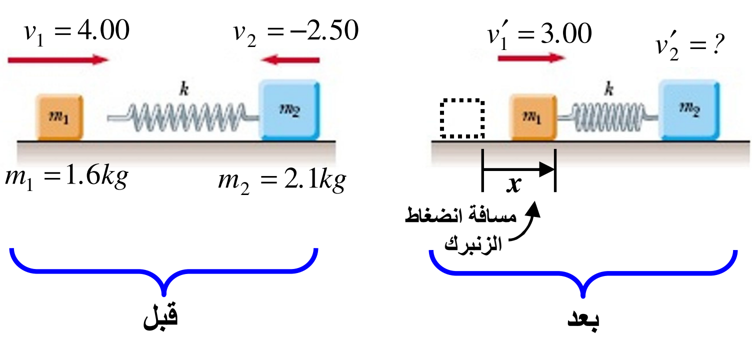
$$(0.025)(600) + 0 = (0.025)(200) + (0.4)v_2'$$

$$v_2' = 25\,m/s$$

(ب) الطاقة المفقودة:

$$\begin{aligned}\Delta K &= \left(\sum K\right)_{after} - \left(\sum K\right)_{before} \\ &= \left(K_1' + K_2'\right) - \left(K_1 + K_2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cancelto{\text{صفر}}{v_2^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(0.025)(200)^2 + \frac{1}{2}(0.4)(25)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(0.025)(600)^2 + 0\right) \\ &= -3875\,J\end{aligned}$$

مثال (11): مثال 9.7 صفحة 347



(أ) سرعة الكتلة الثانية (v_2') بعد التصادم،
من قانون حفظ الزخم:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$
$$(1.6)(4) + (2.1)(-2.5) = (1.6)(3) + (2.1)v_2'$$
$$v_2' = -1.74 m/s$$

الاشارة السالبة تعني ان الكتلة m_2 تتحرك بنفس اتجاهها الاصلي (نحو اليسار).

(ب) مسافة انضغاط الزنبرك (x): نجدها من قانون حفظ الطاقة الميكانيكية للنظام (المكون من كتلتين وزنبرك) حيث النظام محافظ: $\Delta E = 0$

$$E_{before} = E_{after}$$

$$\left(K_1 + \cancelto{\text{صفر}}{U_1}\right) + \left(K_2 + \cancelto{\text{صفر}}{U_2}\right) = \left(K_1' + \cancelto{\text{صفر}}{U_1'}\right) + \left(K_2' + \cancelto{\text{صفر}}{U_2'}\right) + U_{zpring}$$

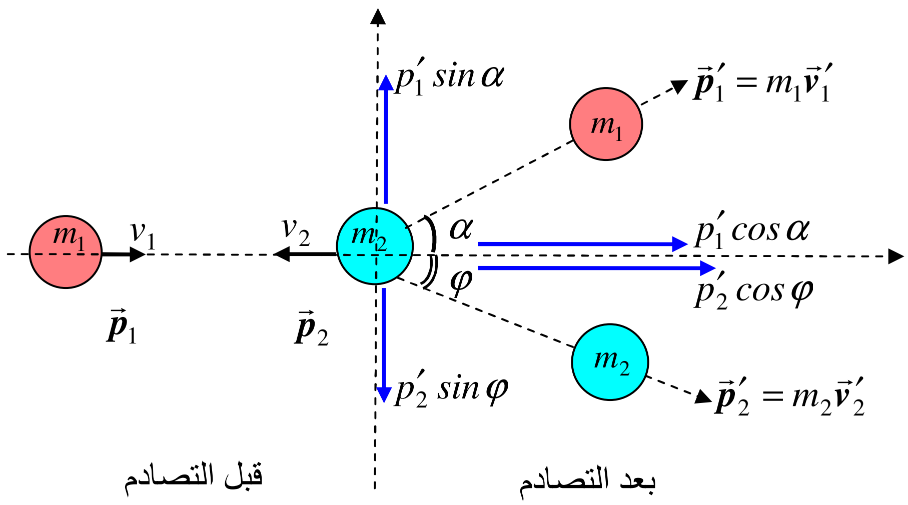
لاحظ أن طاقة الوضع U الناجمة عن الجاذبية الارضية لكل من الكتلتين هي دائما صفر، لأن حركتهما أفقية.
كما ان لدينا طاقة وضع مرونية في الزنبرك (بعد التصادم) بسبب انضغاطه مسافة x : $U_{zpring} = \frac{1}{2}kx^2$.

$$\frac{1}{2}m_1 v^2{}_1 + \frac{1}{2}m_2 v^2{}_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$(1.6)(4)^2 + (2.1)(-2.5)^2 = (1.6)(3)^2 + (2.1)(-1.74)^2 + (600)x^2$$

$$x = 0.173m$$

• التصادم في بعدين Two-Dimensional Collisions

إذا تصادم جسمان يتحركان بخط مستقيم واحد، فإنهما بعد التصادم
(أ) يستمران بالحركة بنفس الاتجاه (في بعد واحد)، كما لاحظنا في الامثلة السابقة أعلاه.
(ب) أو يتحركان في اتجاهين مختلفين بينهما زاوية (اي في بعدين)، كما يوضح الشكل التالي:



حتى نطبق قانون حفظ الزخم في الاتجاهين الافقي والعمودي، نحلل كل من الزخمين بعد التصادم $\vec{p}_1'$ و $\vec{p}_2'$ الى مركبتيهما، كما يوضح الشكل. ثم نطبق قانون حفظ الزخم على الاتجاهين:

• باتجاه خط التصادم الافقي (x):

$$\left(\sum p_x\right)_{before} = \left(\sum p_x\right)_{after}$$

$$p_1 + p_2 = p_1' \cos\alpha + p_2' \cos\varphi$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\varphi \quad .... \ (1)$$

• الاتجاه العمودي على خط التصادم (y):

$$\left(\sum p_y\right)_{before} = \left(\sum p_y\right)_{after}$$

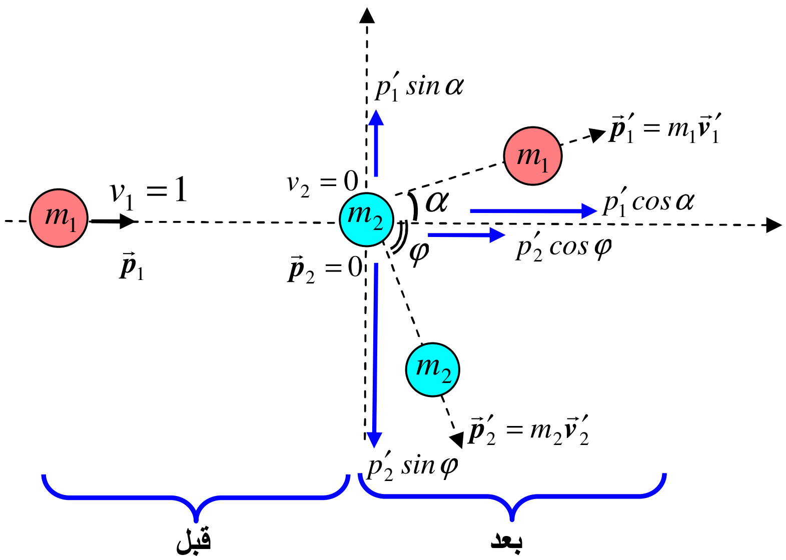
لا توجد حركة في الاتجاه العمودي قبل التصادم

$$0 = p_1' \sin\alpha - p_2' \sin\varphi$$

$$0 = m_1 v_1' \sin\alpha - m_2 v_2' \sin\varphi \quad .... \ (2)$$

عادة نحتاج حل المعادلتين (1) و (2) معا لإيجاد المطلوب في مسألة ما، كما في الامثلة التالية أدناه.

مثال (12): تتصادم كرتان لهما نفس الكتلة $m_1 = m_2 = 0.1kg$، كما يوضح الشكل. الكتلة الثانية ساكنة والأولى تتحرك نحوها بسرعة $v_1 = 1\ m/s$ ثم تحركتا بعد التصادم في مسارين متعامدين. إذا كانت $\varphi = 60^\circ$ ، أوجد سرعة كل كرة بعد التصادم.



الحل: نستنتج أن $\varphi = 60^\circ$ و $\alpha = 30^\circ$

<u>الاتجاه الافقي</u> (x):

$$\left(\sum p_x\right)_{before} = \left(\sum p_x\right)_{after}$$

$$p_1 + \underbrace{\cancel{p_2}}_{\text{صفر}} = p_1' \cos\alpha + p_2' \cos\varphi$$

$$m_1 v_1 + 0 = m_1 v_1' \cos 30 + m_2 v_2' \cos 60$$

$$1 = v_1'\left(\sqrt{3}/2\right) + v_2'(1/2)$$

$$\sqrt{3}\, v_1' + v_2' = 2 \quad ...... \quad (1)$$

<u>الاتجاه العمودي</u> (y):

$$0 = p_1' \cos\alpha - p_2' \sin\varphi$$

$$0 = m_1 v_1' \sin 30 - m_2 v_2' \sin 60$$

$$0 = v_1'\left(\frac{1}{2}\right) - v_2'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$v_1' = \sqrt{3}\, v_2' \quad .... \quad (2)$$

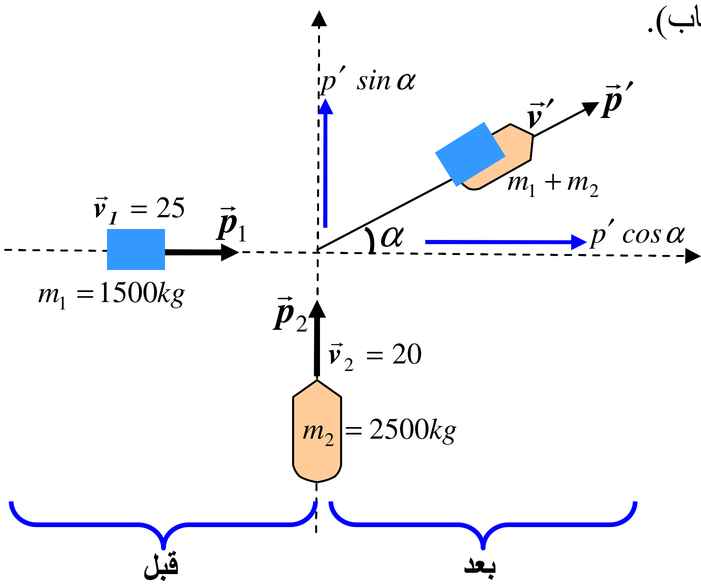
للحصول على السرعتين v_1' و v_2'، نحل المعادلتين (1) و (2): عوض المعادلة (2) في المعادلة (1)

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\, v_2'\right) + v_2' = 2 \quad \Rightarrow \quad 4v_2' = 2 \quad \Rightarrow \quad v_2' = 1/2\ m/s$$

وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة (2)، نحصل على

$$v_1' = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s$$

مثال (13): مثال 9.9 صفحة 452 (إقرأ نص المثال من الكتاب).



هنا التصادم غير مرن وتلتصق السيارتان ببعضهما.
احسب مقدار واتجاه سرعة حطام السيارتين بعد تصادمهما.
لاحظ: بعد التصادم تتحركان بسرعة واحدة v'،
وكتلة واحدة $(m_1 + m_2)$.

الحل: طبق حفظ الزخم على كل من الاتجاهين:

الاتجاه الافقي:
$$\left(\sum p_x\right)_{before} = \left(\sum p_x\right)_{after}$$
$$p_1 = p' \cos\alpha$$
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v' \cos\alpha$$
$$(1500)(25) = (1500 + 2500)\, v' \cos\alpha$$
$$\boxed{v' \cos\alpha = 9.375} \;\ldots\ldots\; (1)$$

الاتجاه العمودي (y):
$$\left(\sum p_y\right)_{before} = \left(\sum p_y\right)_{after}$$
$$p_2 = p' \sin\alpha$$
$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v' \sin\alpha$$
$$(2500)(20) = (4000)\, v' \sin\alpha$$
$$\boxed{v' \sin\alpha = 12.5} \;\ldots\ldots\; (2)$$

الان، نجد السرعة (v') واتجاهها (أي الزاوية α) من حل المعادلتين (1) و (2) معا:

أقسم المعادلة (2) على المعادلة (1):
$$\tan\alpha = 12.5/9.375$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = 53.1^\circ$$

أما مقدار السرعة فيمكن الان إيجادها بتعويض الزاوية في اي من المعادلتين، مثلا من المعادلة (2):

$$v' = 12.5/\sin(53.1)$$
$$= 15.6\ m/s$$