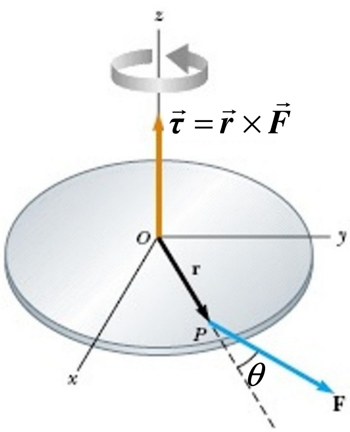
Chapter 11

الزخم الزاوي (كمية التحرك الزاوية)
Angular Momentum



شكل (11.1)

10.1 عزم الدوران Torque ($\vec{\tau}$)

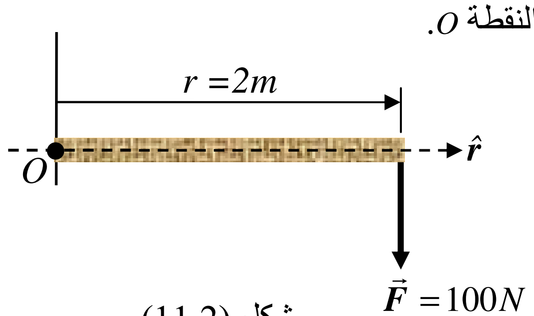
الشكل (11.1) يوضح قوة $\boldsymbol{F}$ تؤثر عل قرص. القوة تؤثر عند متجه الموضع $\boldsymbol{r}$.
عزم الدوران $\vec{\tau}$ الذي تسببه هذه القوة (حول نقطة الاصل O) هو

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad .... \quad (1)$$
$$= rF \sin\theta$$

كيف نجد اتجاه العزم $\vec{\tau}$؟ يكون اتجاه العزم $\vec{\tau}$ متعامدا على كل من $\vec{r}$ و $\vec{F}$، ونجده من قاعدة البرغي: أي بتدوير اتجاه $\vec{r}$ نحو اتجاه $\vec{F}$، نجد أن $\vec{\tau}$ باتجاه المحور z .

مثال: الشكل (11.2) يوضح قوة **F** تؤثر على جسر أفقي مثبت عند النقطة O.
أحسب عزم الدوران الذي تسببه هذه القوة حول النقطة O.

الحل:
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= rF \sin\theta$$
$$= (2)(100) \sin 90 = 200\, N.m \quad \text{(للداخل/سالب)}$$



شكل (11.2)

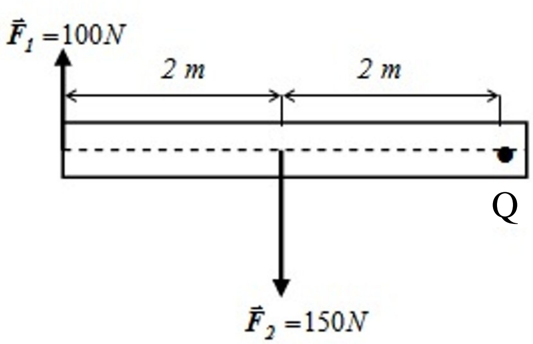
الإتجاه: من قاعدة البرغي نجد أن $\vec{\tau}$ يتجه داخل الصفحة، وفي هذه الحالة نقول انه سالب (أي باتجاه محور z السالب).
وعندما يكون اتجاه $\vec{\tau}$ للخارج نعتبره موجبا (أي باتجاه z الموجب).

مثال: الشكل (11.3) يوضح قوتين تؤثران على جسم مثبت عند النقطة Q. أحسب عزم الدوران الكلي عند النقطة Q والناجم عن القوتين.

الحل: لدينا عزمين، الاول ينتج عن القوة $\vec{F}_1$ والثاني من القوة $\vec{F}_2$.
ولاحظ أنهما باتجاهين متعاكسين.

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = (4m)(100N) = 400N.m \quad \text{(للداخل)}$$
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (2m)(150N) = 300N.m \quad \text{(للخارج)}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$
$$= 400\text{-}300 = 100N.m \quad \text{(للداخل/سالب)}$$



شكل (11.3)

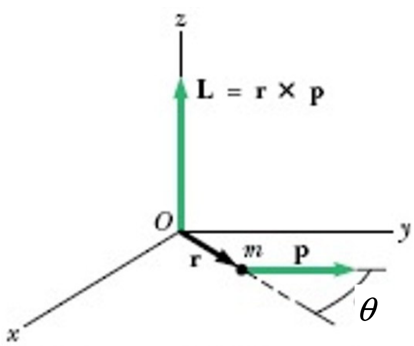
<u>مثال</u>: قوة N $\vec{F}=(3\hat{i}+2\hat{j})N$ تؤثر على جسم مثبت حول المحور z . إذا كان تأثير القوة على نقطة تقع عند $\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j})m$ ، أوجد متجه عزم الدوران $\vec{\tau}$ عند نقطة الاصل.

<u>الحل</u>:

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-7\hat{k})N.m$$

11.2 الزخم الزاوي (كمية التحرك الزاوية) $\vec{L}$ Angular Momentum

الشكل (11.3) يوضح جسيما كتلته m على بعد **r** من نقطة الاصل، ويدور بسرعة **v**. الزخم الزاوي للجسيم بالنسبة لنقطة الاصل تعرف كما يلي:



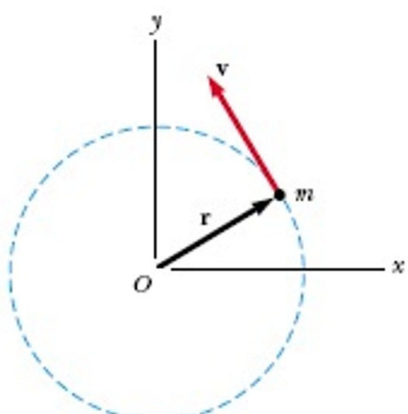
شكل (11.3)

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p} \quad .... \quad (2)$$
$$=r\,p\sin\theta$$
$$=mr\,v\sin\theta\;\hat{z}$$

أي ان الزخم الزاوي $\vec{L}$ لجسيم كتلته m وزخمه الخطي $\vec{p}$ يقع عند متجه الموقع $\vec{r}$ هو المتجه المعطى في المعادلة (2).

<u>اتجاه</u> $\vec{L}$: من قاعدة البرغي (ندور اتجاه $\vec{r}$ نحو اتجاه $\vec{p}$) نجد أن $\vec{L}$ باتجاه z .

<u>مثال</u>: جسم كتلته $3kg$ يدور بسرعة $v = 4\ m/s$ في دائرة نصف قطرها $r=1m$ وتقع في المستوى xy. أحسب الزخم الزاوي للجسم بالنسبة لمركز الدوران O.



<u>الحل</u>:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$
$$=\vec{r}\times(m\vec{v})$$
$$=m\,\vec{r}\times\vec{v}$$
$$=mr\,v\sin\theta$$
$$=(3kg)(1m)(4m/s)\sin 90^\circ$$
$$=12\,kg.m^2/s\;\hat{z}$$

<u>الإتجاه</u>: من قاعدة البرغي (ندور اتجاه $\vec{r}$ نحو اتجاه $\vec{v}$ أو $\vec{p}$) نجد أن $\vec{L}$ باتجاه z .

الحركة الخطية: القوة $\vec{F}$ والتغير في الزخم الخطي $\vec{p}$

اشتق معادلة الزخم الخطي $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$= m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \;\ldots\ldots\; (3a)$$

محصلة القوة ($\sum \vec{F}$) تسبب التغير في الزخم الخطي $\vec{p}$.

الحركة الدورانية: عزم الدوران $\vec{\tau}$ والتغير في الزخم الزاوي $\vec{L}$:

اشتق معادلة الزخم الزاوي (2): $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times \vec{p} = 0} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \;\ldots\ldots\; (3b)$$

محصلة عزم الدوران ($\sum \vec{\tau}$) تسبب التغير في الزخم الزاوي $\vec{L}$

النتيجة $(3b)$ تفيد أن محصلة عزم الدوران $\sum \vec{\tau}$ تسبب التغير في الزخم الزاوي $\vec{L}$ ، تماما كما تسبب محصلة القوة $\sum \vec{F}$ التغير في الزخم الخطي $\vec{p}$ في قانون نيوتن الثاني.

أي أن المعادلة $(3b)$: $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ تمثل النظير الدوراني لقانون نيوتن الثاني $(3a)$: $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$