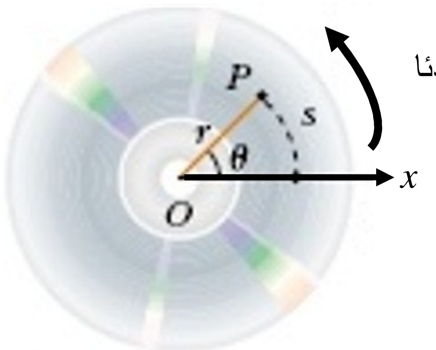
Chapter 10

كينمتيكا الحركة الدورانية
Rotational Kinematics

10.1 الإزاحة، السرعة، والتسارع الزاوي:



شكل (10.1)

الشكل المجاور (10.1) يوضح جسيما P يتحرك في دائرة نصف قطرها r، مبتدئا من محور السينات (أي عند $\theta = 0$)، باتجاه معاكس لعقارب الساعة.
أثناء حركته:

- تتغير الزاوية θ (المتغير الوحيد)
- ويقطع قوسا طوله S

العلاقة بين طول القوس S والزاوية θ هي:

$$\boxed{S = r\theta} \quad \text{............} \quad (1a)$$

$$\text{أو} \quad \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{S}{r}} \quad \text{.............} \quad (1b)$$

لاحظ أن الزاوية θ في المعادلة (1b) لا وحدة لها (وحدة طول على وحدة طول)، الا اننا عادة نعطيها وحدة تدعى "زاوية نصف قطرية" أو "الراديان Radian": وهي الزاوية التي يقابلها قوس S طوله يساوي طول نصف القطر r.

من المعادلة (1b)، محيط الدائرة ($2\pi r$) يناظر زاوية (بالراديان) مقدارها $\theta_{rad} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\, rad$

كما يناظر المحيط زاوية (بالدرجات) مقدارها $\theta_{deg} = 360\, deg$

ومن هذا نجد:

$$2\pi\ rad = 360\ deg \qquad \Rightarrow \qquad 1\ rad = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.3^\circ$$

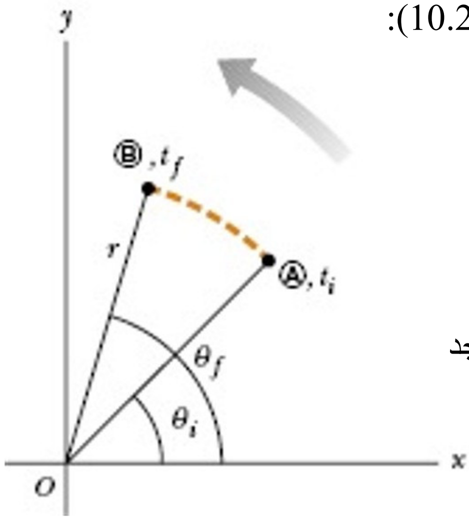
أي أن زاوية مقدارها بالراديان $\theta_{rad} = 2\pi\ rad$ (أو ببساطة $\theta_{rad} = 2\pi$) تناظر دورة كاملة، وبالتالي تناظر بالدرجات زاوية مقدارها $\theta_{deg} = 360^\circ$. ومن هذا يمكن التحويل من الدرجات الى الراديان وبالعكس من خلال العلاقة:

$$\theta_{deg} = \frac{360^\circ}{2\pi}.\theta_{rad}$$

يفضل الان ان تراجع الباب الثاني حيث اشتقينا الازاحة، السرعة، والتسارع للحركة الخطية. أما هنا، نشتق هذه الكميات ولكن للحركة الدورانية.

الازاحة الزاوية Angular Displacement

عندما يتحرك الجسيم المذكور في الشكل المجاور (10.1) أعلاه من النقطة A الى B، خلال فترة زمنية $\Delta t = t_f - t_i$، فإنه يكون قد قطع إزاحة زاوية $\Delta\theta$ كما يوضح الشكل (10.2):



شكل (10.2)

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \quad .... \quad (2)$$

السرعة الزاوية Angular Speed (ω)

(1) معدل السرعة الزاوية $(\bar{\omega})$:
هو التغير في الزاوية θ خلال فترة زمنية Δt. وباستخدام المعادلة (2) نجد

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} \quad .... \quad (3)$$

(2) السرعة الزاوية اللحظية (ω):

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} \quad .... \quad (4)$$

وحدة السرعة الزاوية ω هي rad/s أو ببساطة s^{-1}، حيث ال rad ليس لها أبعاد (dimensionless).

التسارع الزاوي Angular Acceleration (α)

(1) معدل التسارع الزاوي $(\bar{\alpha})$: هو التغير في السرعة الزاوية ω خلال فترة زمنية Δt

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} \quad .... \quad (5)$$

(2) التسارع الزاوي اللحظي (α):

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad .... \quad (6)$$

وحدة التسارع الزاوي α هي rad/s^2 أو ببساطة s^{-2}.

مقارنة بين كميات "الحركة الخطية" و"الحركة الدورانية":

	الموضع	السرعة	التسارع
الحركة الخطية	x	$v=\frac{dx}{dt}$	$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$
الحركة الدورانية	θ	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$	$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$

لحل مسائل الحركة الدورانية، نتبع نفس أسلوب الحركة الخطية مع فرقين يجب الانتباه لهما:
(1) في الحركة الدورانية يجب تعريف محور دوران، يحدث الدوران حوله.
(2) الجسم الدوار يستمر في العودة لموقعه الاصلي أثناء الدوران، وبالتالي يمكنك إيجاد عدد الدورات التي يدورها.

10.2 الحركة الدورانية بتسارع ثابت:

في الحركة الدورانية بتسارع زاوي ثابت ($\alpha=$ ثابت)، نستخدم معادلات حركة شبيهة بمعادلات الحركة الخطية:

معادلات الحركة الخطية بتسارع خطي ثابت (a)

$$v_f=v_i+at$$
$$v_f^2=v_i^2+2a(\Delta X)$$
$$\Delta X=v_it+\frac{1}{2}at^2$$

معادلات الحركة الدورانية بتسارع زاوي ثابت (α)

$$\omega_f=\omega_i+\alpha t$$
$$\omega_f^2=\omega_i^2+2\alpha(\Delta\theta)$$
$$\Delta\theta=\omega_it+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

العلاقات بين الكميات الزاوية والخطية:

الازاحة: الازاحة الخطية S ترتبط بالازاحة الزاوية θ من خلال المعادلة (1):

$$\boxed{S=r\theta}$$

السرعة: العلاقة بين السرعة الخطية v والزاوية ω (باشتقاق المعادلة 1):

$$dS/dt=r\frac{d\theta}{dt}$$
$$\boxed{v=r\omega}\ .....\ (7)\quad\Rightarrow$$ وهذه السرعة الخطية تكون باتجاه المماس للمسار الدائري (سرعة مماسية)

التسارع: التسارع الخطي a يرتبط بالتسارع الزاوي α (باشتقاق المعادلة 7):

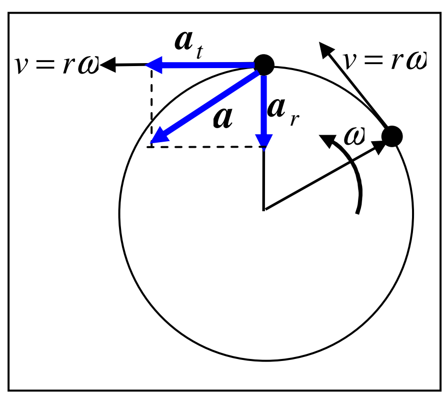
$$\frac{dv}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{a_t=r\alpha}\ .....\ (8)\quad\Rightarrow$$ وهذا التسارع الخطي هو تسارع مماسي أيضا

أما التسارع المركزي (القطري) فهو: $a_r=\frac{v^2}{r}=\frac{(r\omega)^2}{r}=r\omega^2$

وبالتالي مقدار التسارع الكلي للجسيم الدوار هو: $a=\sqrt{a_t^2+a_r^2}$

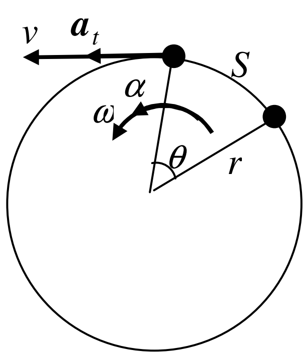
$$=\sqrt{(r\alpha)^2+(r\omega^2)^2}=r\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$$



موجز العلاقات بين الكميات الخطية والزاوية:

الكميات الخطية: (الموقع المتغير S)	**الكميات الزاوية:** (الموقع المتغير θ)
لاحظ، بينما يتحرك الجسيم مسافة S على المحيط	يكون نصف القطر r قد دار زاوية θ
بسرعة خطية $v = dS/dt$،	بسرعة زاوية $\omega = d\theta/dt$
وبتسارع مماسي (خطي) $a_t = dv/dt = d^2S/dt^2$	وبتسارع زاوي $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$
(تغير مقدار السرعة v يولد تسارعا مماسيا (خطيا) a_t)	(تغير السرعة الزاوية ω يولد تسارعا زاويا α)

ويمكن استنتاج العلاقات بين الكميات الخطية و الزاوية أعلاه من الرسم المجاور مباشرة:



الموقع: $S = r\theta$

السرعة: $v = r\omega$

التسارع: $a = r\alpha$

مسألة (7) صفحة 420: جسيم يدور في مسار دائري نصف قطره $r=0.500\ m$، ويعطى موضعه الزاوي بالعلاقة التالية $\theta = 5.00 + 10.0\,t + 2.00\,t^2$ ، حيث الزاوية θ بالراديان و الزمن t بالثانية.
عند الزمن $t = 4\ s$، احسب ما يلي:

(أ) موضع الجسيم الزاوي (أي مقدار الزاوية θ).
(ب) سرعة الجسيم الزاوية، ω.
(ج) تسارعه الزاوي، α.
(د) سرعتة الخطية (المماسية)، v.
(هـ) تسارعه المماسي، a_t.
(و) تسارعه المركزي، a_r.
(ز) تسارعه الكلي، a.

الحل: (أ) الموضع الزاوي

$$\theta = 5.00 + 10.0\,t + 2.00\,t^2$$
$$\theta(t=4) = 5.00 + 10.0\,(4) + 2.00\,(4)^2$$
$$= 75.0\ rad$$

(ب) السرعة الزاوية: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10.0 + 4.00t$

$$\omega(t=4) = 10.0 + 4.00(4) = 26.0\ rad/s$$

(ج) التسارع الزاوي: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4.00$

$$\alpha(t=4) = 4.00\ \ rad/s^2$$

(د) السرعة الخطية: $v = r\omega = 0.500 \times 26.0 = 13.0\ \ m/s$

(هـ) التسارع الخطي (المماسي): $a_t = r\alpha = 0.500 \times 4.00 = 2.00\ m/s^2$

(و) تسارعه المركزي: $a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(13.0)^2}{0.500} = 338\ m/s^2$

(ز) تسارعه الكلي: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{\left(2.00\,m/s^2\right)^2 + \left(338\,m/s^2\right)^2} = 338\ m/s^2$

أو باستخدام العلاقة: $a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$

$$= (\ 0.500m\ )\sqrt{\left(4.00\,s^{-2}\right)^2 + \left(26.0\,s^{-1}\right)^4}$$

$$= (\ 0.500\,m\ )\sqrt{456992\,s^{-4}}$$

$$= 338\ \ \ m/s^2$$