

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y' - 2y = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, -1, -2$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D - 2)^3(D + 3)^2(D - 4)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$(\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^2(\lambda - 4) = 0$$

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\therefore \lambda = 2, 2, 2, -3, -3, 4$$

ويكون الحل العام

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} + (c_4 + c_5 x) e^{-3x} + c_6 e^{4x}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 0, 0, 1, 1$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^x .$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -6$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)y = 0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة .

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, 3, 3$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{3x} \quad (1)$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نوجد

$$y' = 3(c_2 + c_3 x) e^{3x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 9(c_2 + c_3 x) e^{3x} + 3c_3 e^{3x} + 3c_3 e^{3x} \\ &= 3[3(c_2 + c_3 x) e^{3x} + 2c_3 e^{3x}] \end{aligned} \quad (3)$$

بالتعويض في (1), (2), (3) من الشروط الابتدائية .

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2 \quad (4)$$

$$y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3c_2 + c_3 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y''(0) &= -6 \quad \Rightarrow \quad -6 = 3[3c_2 + 2c_3] \\ \Rightarrow \quad -2 &= 3c_2 + 2c_3 \end{aligned} \quad (6)$$

بحل (4), (5), (6) نجد أن

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = -4$$

ويكون الحل الخاص الذى يحقق الشروط

$$y = 2(1 - 2x)e^{3x} - 2$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

حيث ان المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليل الطرف الايسر الى عوامل اقل من الدرجة الثالثة ، لذا نستخدم التخمين لحساب الجذور .

من نظرية المعادلات ، للمعادلة جنر حقيقى واحد على الاقل عبارة عن احد عوامل العدد 13 (الحد المطلق) .

$$\therefore L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0$$

$$\lambda = 1 \quad \text{نفرض}$$

$$L.H.S. = -1 - 3 - 9 + 13 = 0 = R.H.S$$

$$\lambda = -1 \quad \text{نفرض}$$

∴ $\lambda = -1$ أحد الجذور $\Leftrightarrow \lambda + 1 = 0$ احد العوامل باستخدام القسمة

على العامل $(\lambda + 1)$ نحصل على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

∴ تصبح المعادلة المميزة

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

$$y = c_1 e^{-x} + e^{2x} [c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x]$$

ويكون الحل العام

.....

الإثباتات ..

(١) إذا كان $f(x)=e^{\alpha x}$.

نعلم أن

$$\phi(D)e^{\alpha x} = \phi(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{\phi(D)} \phi(\alpha) e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(D)} \phi(D) e^{\alpha x}$$

$$\therefore \phi(\alpha) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

بالقسمة على $\phi(\alpha) \neq 0$

$$\phi(\alpha) \neq 0 \quad , \quad \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} \quad , \quad \phi(\alpha) \neq 0 \quad \text{أى أن}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} v(x) \quad \text{إذا كان}$$

نظم لن

$$\begin{aligned} D[e^{\alpha x} v(x)] &= e^{\alpha x} D v(x) + \alpha e^{\alpha x} v(x) \\ &= e^{\alpha x} (D + \alpha) v(x) \end{aligned}$$

ليضاً

$$\begin{aligned} D^2[e^{\alpha x} v(x)] &= D[e^{\alpha x} (D + \alpha) v(x)] \\ &= e^{\alpha x} [D^2 v(x) + \alpha D v(x)] + \alpha e^{\alpha x} (D + \alpha) v(x) = \\ &= e^{\alpha x} [D + \alpha]^2 v(x) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن

$$D)[e^{\alpha x} v(x)] = e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) v(x) \quad \phi(D)$$

ومن ذلك ، يمكن اثبات أن

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\phi(D)$

$$L.H.S. = \phi(D) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} v(x)$$

$$R.H.S. = \phi(D) [e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)]$$

$$= e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)$$

$$= e^{\alpha x} v(x)$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 + 2D - 3) y = 42 e^{4x}$$

الحل :

أولاً : نوجد حل

$$(D^2 + 2D - 3) y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

∴ المعادلة المميزة

$$\therefore (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -3$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً : نوجد حلاً خاصاً y_p ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} 42 e^{4x} = 42 \frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42 \frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2 e^{4x}$$

$$y_g = y_h + y_p$$

ثالثاً : الحل العام

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

مثال :

أوجدى حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$(D+4D+3)y = 8xe^x - 6, \quad y(0) = -\frac{11}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}$$

الحل :

أولاً : نوجد حل المعادلة المتجانسة

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة وتكون المعادلة المميزة هي :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\therefore (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1, -3$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً : نوجد حلاً خاصاً y_p

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 3} [8xe^x - 6] = \frac{1}{(D+1)(D+3)} [8xe^x - 6]$$

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 8xe^x = 8e^x \frac{1}{(D+2)(D+4)} x$$

$$= \frac{8}{(2)(4)} e^x \frac{1}{(1+\frac{D}{2})(1+\frac{D}{4})} x = e^x (1 - \frac{D}{2})(1 - \frac{D}{4}) x$$

$$= e^x (1 - \frac{D}{2})(x - \frac{1}{4}) = e^x [x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} e^x (4x - 3)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 6 = \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2$$

ثالثا : نوجد الحل العام

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\therefore y = y_G = y c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x (4x-3) + 2 \quad (1)$$

ولابجد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد :

$$y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x [4 + 4x - 3]$$

$$\therefore y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x (4x + 1) \quad (2)$$

من (1) ، (2) والشروط الابتدائية

$$y(0) = \frac{-11}{4} \Rightarrow -\frac{11}{4} c_1 + c_2 - \frac{3}{4} - 2 \quad (3)$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{4} \quad (4)$$

بجمع (3) ، (4)

$$\therefore \frac{-10}{4} = -2c_2 - \frac{5}{2} \Rightarrow 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

بالتعويض فى (3)

$$c_1 = -\frac{11}{4} + \frac{11}{4} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y = \frac{1}{4} e^x (4x-3) - 2$$

$\therefore$ الحل المطلوب

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - D^2) y = 2 \cos x$$

الحل :

$$(D^3 - D^2) y = 0$$

أولا : نوجد حل

نجد أن

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{+x}$$

ثانيا : نوجد y_p ، حيث

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2} 2 \cos x = 2 \frac{1}{-D+1} \cos x$$

بالضرب في المرافق $1 + D$

$$\therefore y_p = 2 \frac{1+D}{1-D^2} \cos x = 2 \frac{1+D}{1+1} \cos x = (1+D) \cos x = \cos x - \sin x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{+x} + \cos x - \sin x$$

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - D + 5)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل للمعادلة المتجانسة هو

$$y_H = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - D + 5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{1 - D} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1 + D}{(1 - D^2)} \{\sin 2x\} = \frac{1 + D}{5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) \end{aligned}$$

أى أن

$$y_p = \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right) + \frac{1}{5} (\sin 2x + \cos 2x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

وفى المثال التالى سنناقش الحل عندما يكون $\phi(-\alpha^2) = 0$.

مثال :

$$(D^2 + 4)y = \sin 2x$$

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + 4)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = A \cos 2x + B \sin 2x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \{\sin 2x\}$$

واضح أن $\phi(-m^2) = \phi(-4) = 0$ في هذه الحالة فإننا نستخدم الطريقة التالية :

$$e^{\alpha} = \cos x + i \sin x$$

من نظرية دي موافر نجد أن :

أى أن

$$\text{الجزء الحقيقي} = \cos x = \text{Re.}(e^{ix})$$

$$\text{الجزء التخيلي} = \sin x = \text{Im.}(e^{ix})$$

وعلى هذا فإن

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \text{Im.}\{e^{2ix}\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{(D + 2i)^2 + 4} \{1\}$$

$$y_p = \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{D^2 + 4iD - 4 + 4} \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{D^2 + 4iD} \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{4iD} \left(1 + \frac{D}{4i}\right)^{-1} \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{4iD} \left(1 - \frac{D}{4i} + \dots\right) \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \left(\frac{1}{4iD} + \frac{1}{16} + \dots\right) \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \left(\frac{x}{4i} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= \text{Im.} (\cos 2x + i \sin 2x) \cdot \left(-\frac{x}{4}i + \frac{1}{16}\right)$$

$$y_p = \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x.$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

من هذا المثال يمكن اثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x$$

هو

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{x}{4} \sin 2x.$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

$$9- \text{ إذا كانت } F(x) \text{ على الصورة } F(x) = \begin{cases} \cosh mx \\ \sinh mx \end{cases}$$

في هذه الحالة فإننا نستخدم الحالة (٦) حيث :

$$\frac{1}{\phi(D^2)} = \begin{cases} \cosh mx \\ \sinh mx \end{cases} = \frac{1}{\phi(m^2)} = \begin{cases} \cosh mx \\ \sinh mx \end{cases}$$

بشرط أن $\phi(m^2) \neq 0$.

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4 - 8D^2 - 9)y = 50 \sinh 2x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4 - 8D^2 - 9)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 - 9 = 0$$

$$(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda^2 + 1) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 3, \lambda = -3, \lambda = \pm i$$

ومنها الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^4 - 8D^2 - 9} \{50 \sinh 2x\} \\ &= \frac{50 \sinh 2x}{16 - 32 - 9} = \frac{50 \sinh 2x}{-25} \end{aligned}$$

$$y_p = -2 \sinh 2x.$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - 2 \sinh 2x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4 - I)y = 10 \cos x \cdot \cosh x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4 - I)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي .

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - I)(\lambda^2 + I) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = \pm i$$

ومنها الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D^4 - I} \{10 \cos x \cdot \cosh x\}$$

$$= \text{Re.} \frac{10}{(D^2 - I)(D^2 + I)} \{e^{ix} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}\}$$

$$= 5 \cdot \text{Re.} \frac{1}{(D^2 - I)(D^2 + I)} \{e^{(1+i)x} + e^{(i-1)x}\}$$

$$\begin{aligned}
&= 5. \operatorname{Re} . \left[\frac{e^{(1+i)x}}{((1+i)^2 - 1)((1+i)^2 + 1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{((i-1)^2 - 1)((i-1)^2 + 1)} \right] \\
&= 5. \operatorname{Re} . \left[\frac{e^{(1+i)x}}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{(-2i-1)(-2i+1)} \right] \\
&= 5. \operatorname{Re} . \left[\frac{e^x e^{ix}}{-5} + \frac{e^{-x} e^{ix}}{-5} \right] \\
&= -\operatorname{Re} . (e^x + e^{-x}) e^{ix} \\
&= -\operatorname{Re} . 2 \cosh x (\cos x + i \sin x) \\
&= -2 \cosh x . \cos x
\end{aligned}$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - 2 \cosh x . \cos x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-1)^2 (D+1)y = -2e^x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-1)^2 (D+1)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda-1)^2 (\lambda+1) = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{(D-1)^2(D+1)} \{-2e^x\} \\ &= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)} \{e^x\} \\ &= \frac{-2e^x}{2(D+1-1)^2} \{1\} \\ &= -e^x \frac{1}{D^2} \{1\} = -\frac{1}{2} x^2 e^x \end{aligned}$$

$$y_p = -\frac{1}{2} x^2 e^x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x - \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-2)y = 3e^x(x+1)$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-2)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda-2=0$$

ومنها $\lambda=2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D-2} \{3e^x(x+1)\}$$

$$= 3e^x \frac{1}{D+1-2} \{x+1\}$$

$$= -3e^x \frac{1}{1-D} \{x+1\}$$

$$= -3e^x (1-D)^{-1} \{x+1\}$$

$$= -3e^x (1+D+\dots) \{x+1\}$$

$$= -3e^x (x+1+1)$$

$$y_p = -3(x+2)e^x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} - 3(x+2)e^x.$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$D^2(D^2 + 4)y = 96x^2$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$D^2(D^2 + 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\lambda = 0, 0, \quad \lambda = \pm 2i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2(D^2 + 4)} \{96x^2\} \\ &= \frac{96}{4} \frac{1}{D^2} \left(1 + \frac{D^2}{4}\right)^{-1} \{x^2\} \\ &= 24 \frac{1}{D^2} \left(1 - \frac{D^2}{4} + \frac{D^4}{16} - \dots\right) \{x^2\} \\ &= 24 \left(\frac{1}{D^2} - \frac{1}{4} + \frac{D^2}{16} - \dots\right) \{x^2\} \\ &= 24 \left(\frac{x^4}{12} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = 2x^4 - 6x^2 + 3$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x^4 - 6x^2 + 3$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 50(e^x + \cos 3x)$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 1, \quad \lambda = \pm 2i$$

وتكون الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{50}{D^3 - D^2 + 4D - 4} \{e^x + \cos 3x\} \\
 &= \frac{50 e^x}{(D+1)^3 - (D+1)^2 + 4(D+1) - 4} \{1\} + \frac{50}{D^3 + 9 + 4D - 4} \{\cos 3x\} \\
 &= \frac{50 e^x}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - D^2 - 2D - 1 + 4D + 4 - 4} \{1\} \\
 &\quad + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{D^3 + 4D + 5} \{e^{3ix}\} \\
 &= \frac{50e^x}{D^3 + 2D^2 + 5D} \{1\} + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{(3i)^3 + 4(3i) + 5} e^{3ix} \\
 &= \frac{50e^x}{5D} \left(1 + \frac{D^2 + 2D}{5}\right)^{-1} \{1\} + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{-27i + 12i + 5} e^{3ix} \\
 &= 10 e^x \left(\frac{1}{D} - \frac{2}{5} + \dots\right) \{1\} + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{5 - 15i} e^{3ix} \\
 &= 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + 10 \operatorname{Re} . \frac{1}{1 - 3i} \cdot \frac{1 + 3i}{1 + 3i} e^{3ix} \\
 &= 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + \frac{10}{10} \operatorname{Re} . (1 + 3i)(\cos 3x + i \sin 3x)
 \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 5D + 6)y = 100 \sin 4x.$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي $\lambda = 2, \lambda = 3$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 5D + 6} \{100 \sin 4x\} \\ &= \frac{100}{-16 - 5D + 6} \{\sin 4x\} \\ &= -20 \operatorname{Im} \cdot \frac{1}{D + 2} \{e^{4ix}\} \\ &= -20 \operatorname{Im} \cdot \frac{e^{4ix}}{D + 4i + 2} \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -20 \operatorname{Im} . \frac{e^{4ix}}{4i+2} \left(1 + \frac{D}{4i+2}\right)^{-1} \{1\} \\
&= -20 \operatorname{Im} . \frac{e^{4ix}}{4i+2} (1 + \dots) \{1\} \\
&= -20 \operatorname{Im} . \frac{e^{4ix}}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} \cdot 1 \\
&= -20 \operatorname{Im} . \frac{(\cos 4x + i \sin 4x)(2-4i)}{20}
\end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = 4 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

يمكن إيجاد الحل الخاص بطريقة أخرى

$$\begin{aligned}
y_p &= -20 \frac{1}{D+2} \{\sin 4x\} \\
&= -20 \frac{1}{D+2} \cdot \frac{D-2}{D-2} \{\sin 4x\} \\
&= -20 \frac{D-2}{D^2-4} \{\sin 4x\} \\
&= -20 \frac{D-2}{-16-4} \{\sin 4x\} \\
&= (D-2) \{\sin 4x\}
\end{aligned}$$

$$y_p = 4 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D + 1)y = x \sin x.$$

الحل:

المعادلة المتجانسة هي

$$(D + 1)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -1$$

ومنها

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D+1} \{x \sin x\} \\ &= \text{Im.} \frac{1}{D+1} \{x e^{ix}\} \\ &= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{D+i+1} \{x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{i+1} \left(1 + \frac{D}{i+1}\right)^{-1} \{x\} \\
&= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \left(1 - \frac{D}{1+i} + \dots\right) \{x\} \\
&= \text{Im.} \frac{e^{ix}(1-i)}{2} \left(x - \frac{1}{1+i}\right) \\
&= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{2} \cdot \left(x(1-i) - \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) \\
&= \text{Im.} \frac{(\cos x + i \sin x)}{2} (x(1-i) + i)
\end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = \frac{x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + \frac{x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cos x$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + m^2)y = a \cos mx + b \sin mx.$$

حيث a, b ثوابت .

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + m^2)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + m^2 = 0$$

$$\lambda = \pm mi$$

ومنها تكون الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{I}{D^2 - m^2} \{a \cos mx + b \sin mx\} \\ &= \frac{a}{D^2 + m^2} \{\cos mx\} + \frac{b}{D^2 + m^2} \{\sin mx\} \\ &= a \operatorname{Re} \cdot \frac{I}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\} + b \operatorname{Im} \cdot \frac{I}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\} \end{aligned}$$

نعتبر الآتي

$$\begin{aligned} \frac{I}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\} &= e^{imx} \cdot \frac{I}{(D + im)^2 + m^2} \{I\} \\ &= e^{imx} \cdot \frac{I}{D^2 + 2imD} \{I\} \\ &= \frac{e^{imx}}{2imD} \left(1 + \frac{D}{2im}\right)^{-1} \{I\} \\ &= \frac{e^{imx}}{2im} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{2im} + \dots\right) \{I\} \\ &= -i \frac{e^{imx}}{2m} \left(x + \frac{i}{2m}\right) \\ &= \frac{-1}{2m} (\cos mx + i \sin mx) \left(ix - \frac{1}{2m}\right) \end{aligned}$$

من هذا نستنتج أن

$$\text{Re.}(\frac{1}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\}) = \frac{1}{2m} (\frac{\cos mx}{2m} + x \sin mx),$$

$$\text{Im.}(\frac{1}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\}) = \frac{-1}{2m} (x \cos mx - \frac{\sin mx}{2m}).$$

من هذا يكون

$$y_p = \frac{a}{2m} (\frac{\cos mx}{2m} + x \sin mx) - \frac{b}{2m} (x \cos mx - \frac{\sin mx}{2m}).$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx + \frac{a}{2m} (\frac{\cos mx}{2m} + x \sin mx) - \frac{b}{2m} (x \cos mx - \frac{\sin mx}{2m}).$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .