مراجعة للاختبار الثاني.

تمرين ① أثبت أن الدالة $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ تحقق معادلات لابلاس.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

ذات متغيرين $(f_{xx} + f_{yy})$

ذات ثلاث متغيرات $(f_{xx} + f_{yy} + f_{zz})$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

النطاق $D_f = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 > 0\}$

$$x^2+y^2 \neq 0$$

$$x^2 = y^2 = 0$$

$$D_f = R^2 \setminus [0,0]$$

من خصائص

$\ln \longrightarrow$ ترفيع $\ln(a)^b = b\ln(a)$

$$\ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

الاشتقاق لـ x $\longleftarrow$ $f_x(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$

المشتقة الثانية $f_{xx}(x,y) = \frac{1 * x^2+y^2 - 2x\,x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\cancel{x^2}+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

الاشتقاق لـ y $f_y(x,y) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}y}{x^2+y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$

المشتقة الثانية لـ y $f_{yy}(x,y) = \frac{1 * x^2+y^2 - 2y\,y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+\cancel{y^2}-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

معادلة لابلاس

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\cancel{y^2}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$f(x,y)$ تحقق معادلة لابلاس

تمرين ②

نفرض أن الدالة $\vec{r}(t) = 6t^2\vec{i} + 2e^t\vec{j} + \ln(t)\vec{k}$

① أحسب مشتقة $\vec{r}(t)$

② أحسب تكامل $\int_1^2 \vec{r}(t)\,dt$

③ أحسب طول القوس المنحنى $\vec{r}(t)$ من $t = 1$ إلى $t = 2$

④ أوجد متجة المماس $\vec{T}(t)$ المنحنى $\vec{r}(t)$

⑤ أوجد متجة الوحدة $\vec{N}(t)$ العمودي على $\vec{T}(t)$

الحل :-

① مشتقة

$$\vec{r}'(t) = 12t\,\vec{i} + 2e^t\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}$$

② تكامل

$$\int_1^2 \vec{r}(t)\,dt = \int_1^2 \left[6t^2\vec{i} + 2e^t\vec{j} + \ln(t)\vec{k}\right] dt$$

$$= \left[\frac{6t^3}{3}\vec{i} + 2e^t\vec{j} + (t\ln t - t)\vec{k}\right]_1^2$$

$$= \left[2t^3\vec{i} + 2e^t\vec{j} + (t\ln t - t)\vec{k}\right]_1^2$$

$$= 14\vec{i} + 2(e^2 - e)\vec{j} + (2\ln 2 - 1)$$

③ طول القوس

$$= \int_1^2 \|r'(t)\|$$

$$= \int_1^2 \sqrt{(12t)^2 + (2e^t)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}$$

④ متجه المماس

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$= \frac{12t}{\|\vec{r}'\|}\vec{i} + \frac{2e^t}{\|\vec{r}'(t)\|}\vec{j} + \frac{1/t}{\|\vec{r}'(t)\|}\vec{k}$$

⑤ متجه الوحدة

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|T'(t)\|}$$

في الاختبار أكمل

تمرين ③

نعرف أن الدالة
$$f(x,y) = \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

① أوجد نطاق الدالة f

② أحسب $f(x,0)$ و $f(0,y)$

③ أثبت أن نهاية الدالة f في $(0,0)$ غير موجودة

① نطاق $D_f = [(x,y) \in R^2 \,[\, x^2+y^2 \neq 0 \,]$

$x^2+y^2 \neq 0 \longrightarrow x \neq 0 , y \neq 0$

② $f(x,0) = \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2$

$f(0,y) = \frac{3y^2}{y^2} = 3$

③

$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 2$

$\lim_{x \to 0} f(0,y) = 3$ إذاً النهاية غير موجودة $f(0,0)$

مثال آخر للنهاية :-

$$f(x,y) = \frac{|x^2+y^2|}{x^2+y^2}$$

$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$

$f(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1$

$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 1$ ، $\lim_{y \to 0} f(0,y) = 1$

إذاً النهاية موجودة في (نقطة) $f(1,1)$

تمرين ④ إذا كانت الدالة $f(x,y,z) = 2xy + 3yz - xz$

$x = \sin t \;;\quad t = z \;;\quad y = e^t$

أستخدم قاعدة السلسلة لحساب $\frac{df}{dt}$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y - z \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial t} = \cos t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 3z \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = e^t$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3y - x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (2y - z)\cos t + (2x + 3z)e^t + (3y - x)\,1$$

تمرين ⑤ إذا كانت الدالة $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ أحسب التفاضل الكلي لـ f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\, e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\, e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$df = 2x\, e^{x^2+y^2+z^2}dx + 2y\, e^{x^2+y^2+z^2}dy + 2z\, e^{x^2+y^2+z^2}dz$$

$$= (2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz)\, e^{x^2+y^2+z^2}$$

حل التمرين 5 إذا أعطيت الدالة نفسها

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

تمرين 6

$$\vec{r}(t) = 2t^2\vec{i} - 3t^2\vec{j} + 2\vec{k}$$

إذا كانت الدالة

1. أحسب مشتقة $\vec{r}(t)$
2. تكامل $\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt$
3. طول التوس من $t=0$ إلى $t=1$
4. متجه المماس $T(t)$ والعمودي $\vec{N}(t)$

1. $$\vec{r}'(t) = 4t\,\vec{i} - 6t\,\vec{j}$$

2. $$\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 \left(2t^2\vec{i} - 3t^2\vec{j} + 2\vec{k}\right)dt$$

$$= \left[\frac{2t^3}{3}\vec{i} - \frac{3t^3}{3}\vec{j} + 2t\,\vec{k}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2t^3}{3} - t^3\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2(1)^3}{3} - \cancel{\frac{2(0)^3}{3}}_{\,0}\,\vec{i} - (1)^3 - \cancel{(0)^3}_{\,0}\,\vec{j} + \left(2(1) - \cancel{2(0)}_{\,0}\right)\vec{k}\right.$$

$$= \frac{2}{3}\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

3. طول التوس

$$\int_0^1 \|\vec{r}'(t)\|\,dt$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(4t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{52}\,t$$

$$\int_0^1 \sqrt{52}\,t\,dt$$

نفس الطريقة

$$= \left[\frac{\sqrt{52}\,t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{52}}{2}$$

4. المماس

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{4t}{\sqrt{52}\,t}\vec{i} - \frac{6}{\sqrt{52}}\vec{j}$$

5. متجه الوحدة

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = \vec{0}$$