سوف يتم تغطية النقاط التالية خلال هذا الفصل:

أولاً: المنطق و جداول الصواب:

١. التقارير البسيطة و المركبة
٢. أدوات الربط و جداول الصواب
٣. التكافؤ المنطقي
٤. قانوني De Morgan
٥. علاقات التطابق و التطابق العكسي
٦. منطق الدرجة الأولى

ثانياً: طرق البرهان:

١. البرهان المباشر
٢. البرهان غير المباشر:
   أ- البرهان العكسي
   ب- البرهان بطريقة الحالات
   ت- المثال المناقض
   ث- البرهان بالتناقض
٣. الاستقراء الرياضي

المنطق الرياضي: (Mathematical Logic)

هو علم يُعنى بدراسة مبادئ و معايير صحة الاستدلال و يتعامل مع المسببات و الاستنتاجات ويستخدم في معظم الأنشطة الفكرية و العلوم البحتة و التطبيقية، كما أنه يعنى بالمعنى الحديث دراسة طرق البرهان و استخدامها.

التقرير: (Proposition)

هو عبارة تتضمن موضوعاً و فعلاً كما هي الجملة في اللغة العربية، غير أن التقرير يحصر فقط في الجمل الخبرية (التي تتضمن خبراً) و ليست الجمل الإنشائية (كصيغ الأمر و النهي و الاستفهام)

و نستطيع التعبير بشكل أدق عن التقرير بأنه الجملة الخبرية التي تحتمل الصحة أو الخطأ فقط.

أمثلة:

١. العدد ٧ أولي
٢. ٤+٦=١٠
٣. اليوم ماطر

التقارير البسيطة و المركبة:

يسمى التقرير بسيطاً إذا كان عبارة عن جملة خبرية واحدة فقط، بينما يسمى مركباً إذا احتوى أكثر من جملة خبرية. سوف نستخدم الأحرف الصغيرة (a,b,c,...) للتعبير عن التقارير البسيطة و الأحرف الكبيرة (A,B,C,...) للتعبير عن التقارير المركبة.

التقارير تحتمل الصحة أو الخطأ، و عندما نريد التحقق من صحة أو خطأ مجموعة من التقارير مرتبطة مع بعضها بعلاقة نستخدم جداول الصواب.

لنتعرف بداية على أهم أدوات الربط بين التقارير.

أدوات الربط: (Connectives)

الرموز $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Leftrightarrow$ تسمى أدوات الربط بين التقارير. للتعرف أكثر على خصائصها نستخدم جداول الصواب. باعتبار أن (T=True, F=False)

أداة النفي ($\neg$): (Negation)

a	$\neg a$
T	F
F	T

العمود الأول "a" يضع كل الاحتمالات الممكنة و العمود الآخر يعطي قيمة ليس a .

أداة العطف أو التزامن ($\wedge$): (Conjunction)

a	b	$a \wedge b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

نلاحظ أن قيمة العلاقة b و a و المعرفة بـ $a \wedge b$ تكون صحيحة فقط عندما يكون التقريران صحيحين.

أداة الفصل ($\vee$): (Disjunction)

a	b	$a \vee b$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تكون العلاقة b أو a و المعرفة بـ $a \vee b$ خاطئة فقط عندما يكون كلاً من b و a خاطئين.

أداة الاستلزام الشرطي ($\Longrightarrow$): (Implication)

a	b	$a \Longrightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

علاقة الاقتضاء تكون خاطئة عندما تكون المعطيات صحيحة و النتيجة خاطئة.

أداة التكافؤ ($\Leftrightarrow$): (Biconditional)

a	b	$a \Leftrightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

التكافؤ هو نتيجة للجدول السابق إذا أخذنا في الاعتبار الاقتضاء من و إلى b و a

يمكننا عمل جداول الصواب للعلاقات السابقة للتقارير المركبة كذلك مع الأخذ بالاعتبار تحديد صفوف كافية لكافة الاحتمالات.

مثال: أوجد جدول الصواب للعلاقات:

١. $p \Longrightarrow (q \vee r)$

٢. $p \Longrightarrow \neg(q \Longrightarrow r)$

تعريف:

نقول عن التقرير المركب أنه **صائب كلياً** إذا كانت جميع القيم فيه صائبة بغض النظر عن قيم التقارير البسيطة المكون منها. و عندما تكون جميع القيم خاطئة يسمى **خاطئ كلياً.**

مثال:

١. $a \Longrightarrow (b \Longrightarrow a)$ صائب كلياً

٢. $p \Leftrightarrow (p \Longrightarrow \neg p)$ خاطئ كلياً

تعريف:

نقول عن التقريرين p و q أنهما متكافئين منطقياً إذا كان $p \Leftrightarrow q$ صائب كلياً.

في الجدول التالي نرى أهم العلاقات المتكافئة منطقياً:

اسم الخاصية	التطابق
Identity laws	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
Domination laws	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
Idempotent laws	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
Double negation law	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow P$
Commutative laws	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associative laws	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Distributive laws	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
De Morgan’s laws	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

المطلوب إثبات العلاقات السابقة !!!

تعريف: التطابق العكسي (contrapositive)

التطابق العكسي للتقرير المركب $p \implies q$ هو التقرير $\neg q \implies \neg p$

نظرية:

كل تقرير يكافأ منطقياً تطابقه العكسي.

البرهان:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
T	T	**T**	F	F	**T**	**T**
T	F	**F**	T	F	**F**	**T**
F	T	**T**	F	T	**T**	**T**
F	F	**T**	T	T	**T**	**T**

من خلال جدول الصواب السابق يتبين أن التقريرين متكافئان منطقياً.

تعريف:

تعرف المجموعة بأنها عبارة عن تجمع عناصر مختلفة.

أمثلة:

Natural numbers: $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

Integers: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة

Rational numbers: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z \,, b \in N \,, b \neq 0\}$ مجموعة الأعداد القياسية

Real numbers: $\mathbb{R}$ = {rational and irrational numbers} مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف:

نقول عن مجموعتين أنهما متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر.

مثال:

نقول عن المجموعتين $\{1, 3, 5\}$ و $\{3, 1, 5\}$ أنهما متساويتان لأنهما يحتويان نفس العناصر. بالتأكيد أنه لا يعتد بترتيب العناصر. نلاحظ أيضا أنه لا يهم إذا كان عنصر من مجموعة سرد أكثر من مرة، حتى أن

$\{1,3,3,3,5,5,5,5,\}$ هو نفس مجموعة $\{1, 3, 5\}$ لأن لديهم نفس العناصر.

طريقة أخرى لوصف مجموعة هي استخدام خواص التوصيف. حيث نصنف جميع العناصر في المجموعة حسب خاصية أو أكثر.

على سبيل المثال المجموعة التي تحوي جميع الأعداد الفردية أقل من ١٠ يمكن كتابتها بالتعبير التالي:

O={x| x is an odd positive integer less than 10}

نحن غالبا ما نستخدم هذا النوع من التدوين لوصف مجموعات عندما يستحيل سرد جميع عناصرها.

على سبيل المثال :

Real numbers: $\mathbb{R}$ = {rational and irrational numbers}　مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريفات هامة:

١. نقول عن عنصر a أنه ينتمي إلى المجموعة A ونكتب $a \in A$ ، عندما يكون a أحد عناصر A . بينما عندما نكتب $a \notin A$ فهذا يعني أن a لا ينتمي إلى A .

٢. نقول أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من B و نكتب $A \subseteq B$ إذا و إذا فقط كان كل عنصر من A هو عنصر من B . و هذا يعني:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \Longrightarrow x \in B$$

٣. المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.

٤. كل مجموعة هي جزئية من نفسها.

٥. عندما تكون A مجموعة جزئية من B و لا تساويها و تكتب $A \subset B$ ، تسمى مجموعة جزئية فعلية من B . و بالعكس نقول أن:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

٦. لتكن S مجموعة تحوي فقط n من العناصر المختلفة، حيث n عدد صحيح موجب، فإن S تسمى مجموعة منتهية و n هو عدد عناصرها أو ***cardinality* of S** و يعبر عنه كما يلي:

$$|S| = n$$

٧. لتكن S مجموعة منتهية عدد عناصرها n، نعرف مجموعة القوة بأنها مجموعة جميع المجموعات الجزئية لـ S . و تعرف بالشكل $\mathcal{P}(S)$. و عدد المجموعات الجزئية هو 2^n.

٨. يعرف الضرب بين مجموعتين A و B كما يلي:

$$A \times B = \{ (a,b) | \ a \in A , b \in B \}.$$

تمارين:

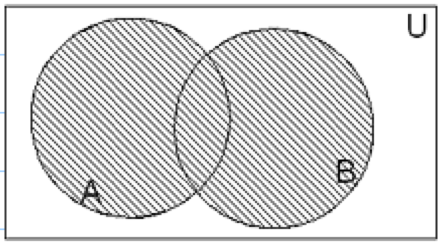
١. إذا كانت $A = \{0,1,2\}$ أوجد مجموعة القوة لـ A .

٢. لتكن $A = \{1,2\}$ و $B = \{3,4\}$ أوجد $A \times B$.

٣. لتكن $A = \{0,1\}$ و $B = \{1,2\}$ و $C = \{0,1,2\}$ أوجد $A \times B \times C$.

العمليات على المجموعات:

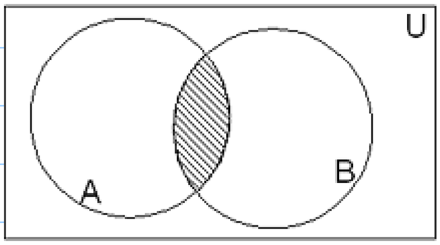
١. الاتحاد : (Union)



اتحاد مجموعتين A و B و يعرف بالشكل $A \cup B$
هو جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو B أو كليهما.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

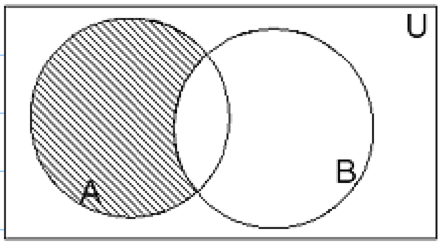
٢. التقاطع: (Intersection)



تقاطع مجموعتين A و B و يعرف بالشكل $A \cap B$
هو جميع العناصر التي تنتمي إلى A و B معاً.

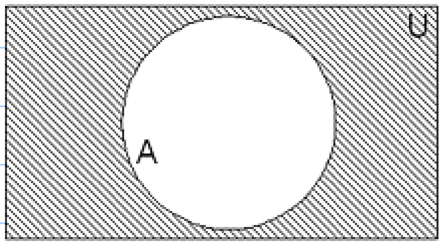
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

٣. الفرق: (Difference)



العنصر x ينتمي إلى الفرق بين A و B إذا و إذا فقط كان
$x \in A \wedge x \notin B$

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



٤. **المتممة: (Complement of a set)**

لتكن U المجموعة الكلية، و لتكن $A \subseteq U$ ،

نعرف متممة A بالنسبة لـ U بأنها $\overline{A} = U - A$

و بشكل آخر:

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$$

بعض خواص المجموعات:

Identity	Name
$A \cup \phi = A$ $A \cap U = A$	Identity laws
$A \cup U = U$ $A \cap \phi = \phi$	Domination laws
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation laws
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Associative laws
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributive laws
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgan's laws

تمارين:

١. أثبت أن $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

٢. أثبت أن $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

٣. أثبت أن $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$.

حل سؤال (٢):

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

تحليل الفرضيات (الحجج):

نرى في كثير من الأحيان كثير من الجدليات يحاول أصحابها إثباتها عن طريق سرد الأسباب التي توصل إلى النتيجة. هذا هو الواقع في مجالات الحياة العامة. و لكن هنا نحن معنيين بسرد نوع الإثبات المطلوب.

الفرضية:

الفرضية هي عبارة عن قائمة من المعطيات متبوعة باستنتاج، و يمكن وصفها بيانياً كما يلي:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline P_{n+1} \end{array}$$

صلاحية الفرضية:

نقول عن الفرضية السابقة أنها صالحة منطقياً إذا و إذا فقط تحقق الشرط

$(P_1 \ \wedge P_2 \wedge \ P_3 \wedge \dots \dots \wedge \ P_n) \quad \Longrightarrow \quad P_{n+1}$ صائب كلياً.

لا حظ أنه ليس بالضرورة أن يكون الاستنتاج (كما في السطر الأخير) صحيحاً، و إنما صلاحية الفرضية تضمن لنا التالي:

إذا كانت جميع المعطيات صحيحة فالاستنتاج صحيح.

مثال:

أثبت صلاحية الفرضية التالية:

$$\begin{array}{c} P \\ P \Longrightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

الحل:

تمرين: أثبت صحة الفرضيات التالية:

1.
$$\begin{array}{c} P \Longrightarrow q \\ \neg P \\ \hline \neg q \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{c} P \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \\ P \lor q \\ \hline \mathrm{r} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{c} P \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \\ \hline P \Longrightarrow r \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{c} P \lor q \\ \neg P \\ \hline q \end{array}$$

بناء الصيغ الرياضية:

كما مر معنا سابقاً فقد شاهدنا أن التقارير هي أبسط جملة رياضية من حيث البناء، و سوف نستخدم منطق التقارير كخريطة لطرق البناء التالية.

المسندات: (Predicates)

هي عبارة عن جملة مكونة من مسند و مسند إليه، للتوضيح أكثر فهي عبارة عن جملة مكونة من خاصية (**Quantifier**) و متغيرات (**Variables**) و عادة نرمز للخواص بأحرف كبيرة و للمتغيرات برموز صغيرة كما يلي:

$$A(x) \quad , \quad B(x,y,z) \quad , \quad Q(n)$$

المسندات تهدف إلى إيجاد علاقة بين المتغيرات و الخاصية التي تحويها.

مثال:

لتكن $G(x,y)$ تمثل الخاصية $x > y$ ، أي من التقارير التالية صحيح:

١. $G(6,13)$ تعني أن 13 أكبر من 6 .
٢. $G(2,0)$ تقرير صحيح.
٣. 4 أقل من 5 يمكن أن تمثل بالمسند $G(5,4)$.

مثال:

في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، لتكن $s(x) = x^2$ دالة معرفة على $\mathbb{N}$ و $P(x,y)$ مسند ممثل بالخاصية $x \leq y$ ، يمكننا تعرف المسند كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad P\big(x, s(x)\big)$$

القياسات (المحددات): (Quantifiers)

القياسات المستخدمة هي $\forall$ و $\exists$ و يجب أن تكون متبوعة بمتغير و ليس ثابت أو دالة.

$\forall x$ تقرأ لكل x (**universal**)

$\exists x$ تقرأ يوجد x (**existential**)

أهم ما يميز موضوع القياسات هو أنها تساعد في فهم و بناء الجمل الرياضية.

و لندرس الأمثلة التالية لنعرف كيف يمكننا ترجمة الصيغ الرياضية باستخدام مفهوم القياسات.

لنفرض أننا نتعامل مع مجموعة الأعداد الحقيقية في الأمثلة الثلاثة التالية.

مثال (١):

$$\forall x (x * 0) = 0$$

و تعني لكل عدد حقيقي x مضروب في صفر فإن الناتج صفر.

مثال (٢):

$$\forall x\big(x * x - x = 0 \ \Rightarrow (x = 0 \ \vee x = 1)\big)$$

لكل عدد حقيقي x إذا كان $x * x - x = 0$ فإنه إما $x = 0$ أو $x = 1$.

مثال (٣):

$$\forall x \neq 0 \ \exists y(x * y = 1)$$

لكل عدد حقيقي لا يساوي الصفر x يوجد عدد حقيقي آخر y بحيث $x * y = 1$.

مثال (٤):

لنفرض أن المجموعة هي مجموعة الأعداد الطبيعية حيث $f(x)$ تعني $x + 1$ و $B(x)$ تعني $x = 0$
ما هي الترجمة اللغوية للعبارات التالية:

(i) $\forall x \ \neg B\big(f(x)\big)$　　(ii) $\exists x \ \neg B\big(f(x)\big)$　　(iii) $\exists x \ B\big(f(x)\big)$

متروك للطالب ....

مثال (٥):

في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، لتكن $s(x) = x^2$ دالة معرفة على $\mathbb{N}$ و $P(x,y)$ مسند ممثل بالخاصية $x \leq y$ ، يمكننا تعرف المسند كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad P\big(x, s(x)\big)$$

تمارين:

١. افترض أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي المجال و $E(x)$ تعني أن x زوجي و $O(x)$ تعني أن x فردي، و $S(x)$ تعني أن x من مضاعفات ٣. ترجم العبارات التالية:

1. $\forall x\big(E(x) \vee O(x)\big)$
2. $\exists x\big(S(x) \wedge \neg E(x)\big)$

٢. افترض أن المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الحقيقية و أن $L(x,y)$ تعني أن x أقل من y اربط بين الصيغ التالية و ما يناسبها من الترجمات:

(a) $\forall x \forall y L(x,y)$
(b) $\forall y \forall x L(x,y)$
(c) $\exists x \exists y L(x,y)$
(d) $\exists y \exists x L(x,y)$
(e) $\forall x \exists y L(x,y)$
(f) $\forall y \exists x L(x,y)$
(g) $\exists x \forall y L(x,y)$
(h) $\exists y \forall x L(x,y)$

١. هناك عدد حقيقي أكبر من أي رقم حقيقي.
٢. هناك عدد حقيقي أقل من أي رقم حقيقي.
٣. لأي رقم حقيقي، يمكننا إيجاد عددا حقيقياً أكبر.
٤. لأي رقم حقيقي، يمكننا إيجاد عدد حقيقي أقل.
٥. إذا كان x و y عددان حقيقيان فإن x أقل من y.
٦. يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث x أقل من y.

نفي القياسات: (Quantifiers Negation)

لنفي القياسات نستخدم القواعد التالية:

1. $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$
2. $\neg(\exists x P(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg P(x))$

تعني القاعدة الأولى : " ليس صحيحاً أنه كل x تحقق الخاصية P **يكافئ** يوجد x لا تحقق الخاصية P "

و تعني القاعدة الثانية: "ليس صحيحاً أنه يوجد x تحقق الخاصية P **يكافئ** كل x لا تحقق الخاصية P"

مثال:

اعكس العلاقات في القياسات التالية:

1. $\exists x \exists y \; P(x,y)$

النفي $\forall x \forall y \; \neg P(x,y)$

2. $\exists x \forall y \exists z \; P(x,y,z)$

النفي $\forall x \exists y \forall z \; \neg P(x,y,z)$

٣. لكل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي y بحيث أن $y = \sqrt{x}$

النفي يوجد عدد حقيقي x بحيث أن لكل عدد حقيقي y فإن $y \neq \sqrt{x}$

ترجمة للمثال:

$$\forall x \exists y \left(y = \sqrt{x}\right) \;\Leftrightarrow\; \exists x \forall y \left(y \neq \sqrt{x}\right)$$

حان الوقت لإثبات بعض النظريات. وهناك طرق مختلفة للقيام بالبرهان، و لعل من الطرق الأكثر وضوحا، تقنية تدعى البرهان المباشر. ولكن قبل أن نبدأ، من المهم أن نأخذ في الاعتبار ثلاثة محاور رئيسية هي: النظرية، والإثبات، والتعريف.

النظرية:(Theorem)

هي صيغة رياضية صحيحة، تحتاج إلى التحقق من صحتها بطرق علمية سليمة و مناسبة.

الإثبات: (Proof)

إثبات أي نظريةٍ ما هو طريقة علمية مكتوبة تهدف إلى التحقق من صحتها بشكل مؤكد لا لبس فيه، و يجب أن يكون الإثبات مفهوماً و مقنعاً لأي شخص لديه ما يلزم من الخلفية والمعرفة. وتشمل هذه المعرفة فهم معاني العبارات الرياضية والكلمات والرموز التي تحدث في نظرية وبرهان لها. فمن الأهمية بمكان أنه على كلٍ من الكاتب للبرهان والقراء الاتفاق على المعاني الدقيقة لكل الكلمات، و إلا سيكون هناك مستوى لا يطاق من الغموض.

التعريف: (Definition)

هو تفسير لا لبس فيه لمعنى كلمة أو عبارة رياضية.

فيما يلي سوف نقوم بتعريفات مهمة لبعض الحقائق التي من الممكن أن نتعرض لها خلال دراستنا. و لعل من أبرز ما يهمنا الآن أن نسلك الطريقة العلمية الصحيحة لتعريف أي عبارة أو معنى رياضي حتى لو كان معروفاً من قبل.

١. العدد الزوجي: (Even integer)

نقول أن n عدد زوجي إذا كان $n = 2a$ حيث a عدد صحيح.

مثال 10 عدد زوجي لأن $10 = 2 * 5$

بينما 7 ليس عدد زوجي.

٢. العدد الفردي: (Odd integer)

نقول أن n عدد فردي إذا كان $n = 2a + 1$ حيث a عدد صحيح.

٣. التكافؤ: (Parity)

نقول أن أي عددين صحيحين متكافئان إذا كانا معاً زوجيين أو كانا معاً فرديين، و إذا حدث غير ذلك فإن العددين يسميان في هذه الحالة متكافئان عكسياً.

٤. القاسم: (Divisor)

نقول أن a قاسم لـ b حيث $a, b \in \mathbb{Z}$ أو a تقسم b و نكتب $a \mid b$ إذا وجد $c \in \mathbb{Z}$ بحيث أن:

$$b = ac$$

و نقول أيضاً أن b مضاعف لـ a .

٥. العدد الأولي: (Prime number)

نقول أن العدد الطبيعي p عدد أولي إذا كان له قاسمان فقط هما 1 و p .

نستطيع و بسهولة أن نستنتج الحقائق التالية :

إذا كان $a, b \in \mathbb{Z}$ فإن:

- $a + b \in \mathbb{Z}$
- $a - b \in \mathbb{Z}$
- $ab \in \mathbb{Z}$

كما نستطيع أن نستنتج مما سبق ما يلي:

$a^2\, b - \; ca + \; b \in \mathbb{Z}$ حيث $a, b, c \in \mathbb{Z}$

البرهان المباشر: (Direct Proof)

إذا كان لدينا الجملة الشرطية $Q \Longrightarrow P$ فإن طريقة البرهان المباشر هي افتراض المعطى P و من ثم إثبات المطلوب Q . و سمي بالبرهان المباشر لتوافقه مع اتجاه الحالة الشرطية.

للتوضيح أكثر.. انظر الجدول التالي:

الجملة إذا كان P فإن Q .
البرهان:
ليكن P
.
.
.
إذاً Q

مثال: إذا كان x عدداً فردياً فإن x^2 فردي. (أثبت)

الحل:

ليكن x عدداً فردياً

إذاً .. $x = 2a + 1$ بحيث $a \in \mathbb{Z}$ — من تعريف العدد الفردي.

و هكذا ..

$x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ — فك التربيع

لذا ..

$x^2 = 2b + 1$ حيث $b = 2a^2 + 2a$ — بالتعويض عن قيمة b

و لكن بالرجوع للحقيقة السابقة فإن $b \in \mathbb{Z}$

إذاً x^2 عدد فردي — من تعريف العدد الفردي.

تمارين:

١. إذا كان x عدداً زوجياً فإن $x^2 - 6x + 5$ فردي.
٢. إذا كان x عدداً فردياً فإن $3x + 7$ زوجي.
٣. إذا كان x عدداً فردياً فإنه عبارة عن فرق بين مربعين. $2a + 1 = (a+1)^2 - a^2$
٤. إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{Z}$ فإن $a \mid c$.
٥. ليكن كل من x و y عددين موجبين. إذا كان $x \leq y$ فإن $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$