حل اوراق المراجعة

السؤال الاول :.

① ادرس قابلية الاشتقاق للدوال المعرفه على مجالها كما يلي

(i) $f(x) = |x|^3$

(ii) $f(x) \begin{cases} 1 , & x \geq 0 \\ -4 , & x < 0 \end{cases}$

الجواب :.

(i) $f|x|^3$

- f قابله للاشتقاق على $\mathbb{R}\{0\}$
- سنبحث اشتقاق الدالة f عند $x = 0$

* الاتصال عند النقطه $x = 0$

$$f(x) \begin{cases} x^3 , & x \geq 0 \\ -x^3 , & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} -x^3 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$\therefore$

الدالة f متصله عند $x = 0$

متصله عند C ✓

$$f'(x) \begin{cases} 3x^2 , & x \geq 0 \\ -3x^2 , & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 3x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -3x^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$$

$\therefore$ الدالة f قابله للاشتقاق عند $x = 0$

(أ)

$$f(x) \begin{cases} 1 , & x \geq 0 \\ -4 , & x < 0 \end{cases}$$

* الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$

* سنبحث اشتقاق الدالة f عند $x = 0$

= الاتصال عند $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -4$$

∴ الدالة f غير متصلة عند $x = 0$

∴ هي غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

غير متصل عند $x = 0$ ⟸ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

⑤ اوجد مشتقات الدوال المعرفه كمايلي

(i) $f(x) \quad \frac{6+\cos x}{2+3\sin x}$

(ii) $f(x) \quad \sin x \cos x$

(iii) $f(x) \quad (3+\tan(2x))^{-4/3}$

الجواب :-

(i)

$$f(x) = \frac{6+\cos x}{2+3\sin x}$$

$$f'(x) \quad \frac{-\sin x(2+3\sin x) - (6+\cos x)\,3\cos x}{(2+3\sin x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2\sin x - 3\sin x^2 - 18\cos x - 3\cos x^2}{(2+3\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin x - 18\cos x - 3}{(2+3\sin x)^2}$$

$$\frac{-3\sin x^2 - 3\cos x^2}{-3(\sin x^2 + \cos x^2)}$$

$$\Rightarrow \sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

(ii)

$$f(x) = \sin x \cos x$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot -\sin x$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(iii)

$$f(x) = (3 + \tan(2x))^{-4/3}$$

$$f'(x) = -4/3\,(3 + \tan(2x))^{-7/3} \cdot (2\sec^2(2x))$$

السؤال الثاني :

1- اوجد مشتقات الدوال التالية مستعملاً قاعدة السلسلة :

(i) $y = \cos(3x)$

(ii) $y = (x^2 + 4)^{21}$

(iii) $y = \sin^2 x$

الجواب :-

(i)

$$y = \cos(3x)$$

$$y = \cos(u)$$

$$u = 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\sin 3x \cdot 3$$

$$\frac{dy}{dx} = -3\sin 3x$$

(ii)

$$y = u^{21}$$

$$u = x^2 + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 21u^{20} \cdot 2x$$

$$21(x^2+4) \cdot 2x$$

(iii)

$$y = u^2$$

$$u = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot \cos x$$

$$2\sin x \cdot \cos x$$

⑪ اوجد $y'' = \frac{d}{dx}(y)$ للدالة المعرفه ضمنياً بالمعادلة

$3y^2 + 4x^2 = 16$

ثم اوجد معادلتي المماس و العمودي على المماس للمنحنى عند النقطه (1،1) الواقعه عليه

$$6yy' + 8x = 0$$

$$\frac{y'(6y)}{6y} = \frac{-8x}{6y} \qquad y' = \frac{-8x}{6y} = y' = -\frac{4x}{3y}$$

$$y'' = \left(-\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{x}{y}\right]\right)' \Rightarrow -\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{y - xy'}{y^2}\right] \Rightarrow -\frac{4}{3}\left[\frac{y - x\cdot\frac{-4x}{3y}}{y^2}\right]$$

$$-\frac{4}{3}\left[\frac{y + \frac{4x^2}{3y}}{y^2}\right] \Rightarrow -\frac{4}{3}\left[\frac{\frac{3y^2 + 4x^2}{3y}}{y^2}\right]$$

(1,1)

$$-\frac{4}{3}\left[\frac{1}{y^2}\cdot\frac{3y^2 + 4x^2}{3y}\right] \Rightarrow -\frac{4}{3}\left[\frac{3y^2 + 4x^2}{3y^3}\right]$$

$$-\frac{4}{3}\left[\frac{7}{3y^3}\right] = \frac{-28}{9y^3}$$

ميل المماس عند النقطه (1,1)

$$m = \frac{-4x}{3y} = -\frac{4}{3}$$

معادله المماس

$$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{4}{3}$$

$$3(y-1) = -4(x-1)$$

$$3y - 3 = -4x + 4$$

$$3y + 4x - 3 - 4 = 0$$

$$3y + 4x = 7$$

ميل العمودي على المماس عند النقطه (1،1)

متلوب الميل المماس مع قلب الاشارات

$$-\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} \quad -1\cdot\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

معادله ميل العمودي على المماس

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{3}{4}$$

$$4(y-1) = 3(x-1)$$

$$4y - 4 = 3x - 3$$

$$4y - 3x - 4 + 3 = 0$$

$$4y - 3x = 1$$

التمرين ③ لتكن

$f: [0, \pi] \to [-1, 1]$

$x \to \cos x$

①

أ) $(f^{-1})'(x)$

ب) $f^{-1}(1/2)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-1)$ احسب

$(f^{-1})' = -\sin x$

أ) $\frac{-1}{\sin x} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

ب)

$\cos a = 1/2$

$a \in [0, \pi]$

$a = \frac{\pi}{3}$

$\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f^{-1}(1/2)$

$\cos a = 0$

$a \in [0, \pi]$

$a = \frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$

$f^{-1}(0)$

$\cos a = -1$

$a \in [0, \pi]$

$a = \pi$

$\cos^{-1} -1 = \pi$

$f^{-1}(-1)$

السؤال الثالث :-

① برهن ان الدالة التالية تحقق نظرية رول ثم اوجد قيم c التي تحقق النظرية

$\forall x \in [-1,1]$ $\quad f(x) = x^3 - x$

$a \quad b$

① * مستمرة على الفترة $[-1,1]$ لانها كثيرة حدود

② * قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لانها كثيرة حدود

③ *
$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$
$$f(1) = (1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$f(-1) = f(1) = 0$$

* تحقق شروط نظرية رول

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$f'(c) = 0$$
$$3c^2 - 1 = 0$$
$$\frac{3c^2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\sqrt{c^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad ; \quad c = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

© بين اذا كانت الدالة التاليه تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة ثم اوجد قيمة c التي تحققها :

$$f(x) = \begin{cases} -3 + x^2 & x \in [0,1] \\ -\frac{2}{x} & , \forall \in (1,2] \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 1$

$1 < x \leq 2$

• الدالة معرفة عند $x = 1$

اتصال عند $x = 1$

$$0 \quad \begin{cases} -3 + x^2 & , x \leq 1 \\ -\frac{2}{x} & , x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^+} -\frac{2}{1} = -2$

$\lim_{x \to 1^-} -3 + 1 = -2$

∴ الدالة f متصلة عند $x = 1$

$$f'(x) \begin{cases} 2x & , x \leq 1 \\ \frac{2}{x^2} & , x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{1} = 2$

$\lim_{x \to 1^-} 2x = 2$

الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

يوجد $c \in (0,2)$ ∴

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$f'(c)$

$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2}$ $\quad c = -\frac{1}{2}$

$\frac{2}{c^2} = -1 \Rightarrow -c^2 = \frac{2}{-1}$ $\quad \sqrt{c^2} = \sqrt{2}$ $\quad = c = \pm\sqrt{-2}$

$c = +\sqrt{-2}$

∴ $c = \frac{1}{2}$ او $c = +\sqrt{2}$

السؤال الرابع :-

اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية للدوال التالية

(i) $f(x) = x^3 + 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = \sin(4x)$ $\forall x \in [0, \pi]$

الجواب :-

قابلة للاشتقاق لانها كثيرة حدود

(i) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$3(x^2+1)$

$f'(x) = 0 \iff x^2+1 = 0 \implies x^2 = -1$

لا توجد قيمة تربيعها وتجعل عدد سالب

∴ لا توجد قيم قصوى محلية

الدالة متزايدة على $\mathbb{R}$

(iii) $f(x) = \sin 4x$

$f'(x)$ $\frac{4\cos 4x}{4} = \frac{0}{4}$

$\cos(4x) = 0$

$\frac{4x}{4} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4}$

$x = \frac{\pi}{8}$

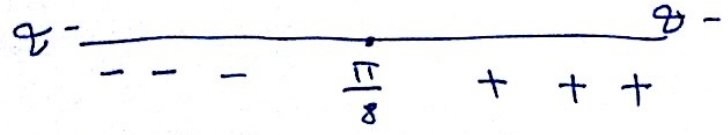
$\frac{\frac{\pi}{2}}{4} + \frac{k\pi}{4}$

$\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}$

$\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{8}$

قيمة صغرى $= \frac{\pi}{8}$



التزايد $\left[\frac{\pi}{8}, \infty\right)$ التناقص $\left(-\infty, \frac{\pi}{8}\right]$