اســـم الطالب:	
الرقم الأكاديمي:	

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلا.. و أنت تجعل الحزن سهلا..

الاختبار **الأول** لمقرر

المنطق و طرق الإثبات
0817-124

النموذج (A)

أجب عن **أربعة** فقط من الأسئلة التالية:
على أن يكون السؤال رقم **(١)** من ضمن الأسئلة المختارة
جميع الأسئلة من ٦ درجات ما عدا السؤال الأول من ٧ درجات

مع تمنياتي الحارة بالتوفيق للجميع،

د. عبدالرحمن القويزاني

السؤال الأول (إجباري): ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصحيحة أو الأكثر صحة فيما يلي:

١. التقرير (Proposition) هو جملة خبرية:

أ	تحتمل الصحة أو الخطأ فقط	ب	تحتمل الصحة و الخطأ معاً	ج	لا تحتمل الصحة و الخطأ معاً
د	كل ما سبق صحيح	**هـ**	(أ) و (ج) فقط صحيح.		

٢. من أمثلة التقارير المنطقية:

أ	محمد نجح في الاختبار	ب	العدد ٣ غير أولي	ج	٤+٦=١٠
د	كل ما سبق صحيح	هـ	(أ) و (ج) فقط صحيح.		

٣. من قوانين دي مورجان De Morgan's laws فإن التقرير $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$:

أ	صائب كلياً	ب	خاطئ كلياً	ج	ليس صائب و لا خاطئ كلياً
د	متكافئ منطقياً	**هـ**	(أ) و (د) فقط صحيح.		

٤. التطابق العكسي للتقرير المركب $p \Longrightarrow q$ هو التقرير:

أ	$\neg p \Longrightarrow \neg q$	**ب**	$\neg q \Longrightarrow \neg p$	ج	$p \Longrightarrow \neg q$
د	$q \Longrightarrow \neg p$	هـ	$q \Longrightarrow p$		

٥. إذا كان $A = \{0,1\}$ و $B = \{1,2\}$ و $C = \{0,1,2\}$ فإن $|A \times B \times C|$ يساوي:

أ	١٢٠	ب	٤٨	ج	٨	د	١٦	**هـ**	١٢

٦. إذا كان $A = \{0,1,2,3,4\}$ فإن $|\mathcal{P}(A)|$ يساوي:

أ	٥	ب	٥٠	ج	١٢٠	**د**	٣٢	هـ	١٢

٧. لتكن $G(x,y)$ مسنداً ممثل بالخاصية $x - y < 0$ فإن:

أ	$G(5,6)$ تقرير صحيح	ب	$G(4,0)$ تقرير خاطئ	ج	$G(-4,-2)$ تقرير صحيح
د	كل ما سبق صحيح	هـ	كل ما سبق خطأ		

٨. نفي القياس $\forall x \neq 0\ \exists y(x * y = 1)$ هو

أ	$\exists x \neq 0\ \forall y(x * y \neq 1)$	ب	$\exists x = 0\ \forall y(x * y \neq 1)$	ج	$\exists x \neq 0\ \forall y(x * y = 1)$
د	كل ما سبق خطأ	هـ	(أ) و (ب) فقط خطأ		

السؤال الثاني: أثبت أن

١. $a \implies (b \implies a)$ صائب كلياً

٢. $p \Leftrightarrow (p \implies \neg p)$ خاطئ كلياً

٣. $\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$

a	b	$b \Rightarrow a$	$a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

p	$\Leftrightarrow$	$(p$	$\Longrightarrow$	$\neg p)$
T	F	T	F	F
F	F	F	T	T

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$\overline{A \cup (B \cap C)}$	$\overline{B} \cup \overline{C}$	$\overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1

السؤال الثالث: لنفرض أن المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية حيث $f(x) = x + 1$

و $B(x)$ تعني $x = 0$ ما هي الترجمة اللغوية للعبارات التالية:

١. $\forall x \neg B(f(x))$

٢. $\exists x \neg B(f(x))$

٣. $\exists x\, B(f(x))$

١. $\forall x \neg B(f(x))$

لكل عدد طبيعي x فإن $x + 1 \neq 0$

٢. $\exists x \neg B(f(x))$

يوجد عدد طبيعي x بحيث أن $x + 1 \neq 0$

٣. $\exists x\, B(f(x))$

يوجد عدد طبيعي x بحيث أن $x + 1 = 0$

السؤال الرابع:

(أ) افترض أن المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الحقيقية و أن $L(x,y)$ تعني أن x أقل من y . اربط بين الصيغ التالية و ما يناسبها من الترجمات:

(a) $\forall x \forall y L(x,y)$ (٥)

١. هناك عدد حقيقي أكبر من أي رقم حقيقي. (b) $\forall y \forall x L(x,y)$ (٥)

٢. هناك عدد حقيقي أقل من أي رقم حقيقي. (c) $\exists x \exists y L(x,y)$ (٦)

٣. لأي رقم حقيقي، يمكننا إيجاد عددا حقيقياً أكبر. (d) $\exists y \exists x L(x,y)$ (٦)

٤. لأي رقم حقيقي، يمكننا إيجاد عدد حقيقي أقل. (e) $\forall x \exists y L(x,y)$ (٣)

٥. إذا كان x و y عددان حقيقيان فإن x أقل من y . (f) $\forall y \exists x L(x,y)$ (٤)

٦. يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث x أقل من y . (g) $\exists x \forall y L(x,y)$ (٢)

(h) $\exists y \forall x L(x,y)$ (١)

(ب) في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، لتكن $s(x) = x^2$ دالة معرفة على $\mathbb{N}$ و $P(x,y)$ مسند ممثل بالخاصية $x \leq y$ ، يمكننا تعرف المسند كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad P\big(x, s(x)\big)$$

١. ترجم العبارة السابقة لغوياً.

لكل عدد طبيعي x فإن $x \leq x^2$

٢. أوجد نفي القياس السابق.

يوجد عدد طبيعي x بحيث $x > x^2$

٣. هل العبارة $P(-1,1)$ صحيحة؟ لماذا؟

لا، العبارة ليست صحيحة. لأن $-1 \notin \mathbb{N}$

٤. أوجد مثالاً للقياس المذكور.

$P(2,4)$

السؤال الخامس: باستخدام البرهان المباشر أثبت ثلاث فقرات مما يلي:

١. إذا كان x عدداً زوجياً فإن $x^2 - 6x + 5$ فردي.

٢. إذا كان x عدداً فردياً فإن $3x + 7$ زوجي.

٣. إذا كان x عدداً فردياً فإنه عبارة عن فرق بين مربعين.

٤. إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{Z}$ فإن $a \mid c$.

١. ليكن x عدداً زوجياً، إذاً يوجد عدد $a \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = 2a$

$$\therefore x^2 - 6x + 5 = (2a)^2 - 6(2a) + 5 = 4a^2 - 12a + 5 = 2(a^2 - 6a + 2) + 1$$

حيث أن $a^2 - 6a + 2$ عدد صحيح إذاً $x^2 - 6x + 5$ عدد فردي.

٢. إذا كان x عدداً فردياً إذاً يوجد عدد $a \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = 2a + 1$

$$\therefore 3x + 7 = 3(2a + 1) + 7 = 6a + 3 + 7 = 2(3a + 5)$$

حيث أن $3a + 5$ عدد صحيح إذاً $3x + 7$ عدد زوجي.

٣. إذا كان x عدداً فردياً إذاً يوجد عدد $a \in \mathbb{Z}$ بحيث $x = 2a + 1$

$$x = 2a + 1 + a^2 - a^2 = (a + 1)^2 - a^2$$

٤. إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ فإنه يوجد عددان $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ بحيث

$$b = k_1 a, \qquad c = k_2 b$$

بالتعويض عن قيمة b نجد أن: $\therefore c = k_1 k_2 a$

إذاً يوجد عدد صحيح $k = k_1 k_2$ بحيث أن $c = ka$

إذاً $a \mid c$