المملكة العربية السعودية
جامعة الملك فيصل
كلية العلوم ـ قسم الرياضيات
الفصل الثاني ـ ١٤٣٣هـ

الاختبـــار: الثاني
اليـــوم: السبت
التاريـــخ: ١٤٣٣/٥/٢٩هـ
المقـــرر: المنطق و طرق الإثبات

اســـم الطالب:	
الرقم الأكاديمي:	

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلا.. و أنت تجعل الحزن سهلا..

الاختبار **الثاني** لمقرر

المنطق و طرق الإثبات
0817-124

أجب عن **جميع** الأسئلة التالية:

جميع الأسئلة من ٦ درجات ما عدا السؤال الثاني من ٧ درجات

زمن الاختبار: ساعة و نصف فقط

مع تمنياتي الحارة بالتوفيق للجميع،

د. عبدالرحمن القويزاني

السؤال الأول:

١. عرف العدد الفردي.

نقول أن n عدد فردي إذا كان $n = 2a + 1$ حيث a عدد صحيح.

٢. أثبت أنه إذا كان x عدداً صحيحاً فردياً فإن x^2 فردي.

ليكن x عدداً فردياً

إذاً .. $x = 2a + 1$ بحيث $a \in \mathbb{Z}$ من تعريف العدد الفردي.

و هكذا ..

$x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ فك التربيع

لذا ..

$x^2 = 2b + 1$ حيث $b = 2a^2 + 2a$ بالتعويض عن قيمة b

و لكن بالرجوع للحقيقة السابقة فإن $b \in \mathbb{Z}$

إذاً x^2 عدد فردي من تعريف العدد الفردي.

٣. ليكن كل من x و y عددين موجبين. أثبت أن $2\sqrt{xy} \leq x + y$

نفرض أن كلَا من x و y عددين موجبين

إذاً $0 \leq (x - y)^2$

$0 \leq x^2 - 2xy + y^2$

$4xy \leq x^2 + 2xy + y^2$

$4xy \leq (x + y)^2$

بجذر الطرفين $2\sqrt{xy} \leq x + y$

السؤال الثاني:

١. ليكن $n \in \mathbb{Z}$ أثبت أن $n^2 + n$ عدد صحيح زوجي.

ليكن $n \in \mathbb{Z}$ ، لدينا حالتان :

i. n odd $\Longrightarrow n = 2a+1, a \in \mathbb{Z},\ n^2 + n = (2a+1)^2 + 2a + 1 = 2(2a^2 + 3a + 1)$

ii. n even $\Longrightarrow n = 2a, a \in \mathbb{Z},\ n^2 + n = (2a)^2 + 2a = 2(2a^2 + a)$

٢. ليكن $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث أنهما متكافئان عكسياً أثبت أن حاصل الضرب عدد صحيح زوجي.

ليكن a فردي و b زوجي

$\Longrightarrow a = 2k+1, b = 2n, \quad k, n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow ab = (2k+1)(2n) = 4kn + 2n = 2(2kn + n)$

٣. ليكن $n \in \mathbb{Z}$ أثبت أن $n(n+1)$ عدد صحيح زوجي لأي عددين متتاليين.

ليكن $n \in \mathbb{Z}$ لدينا حالتان: (لكن يمكن الاستفادة مباشرة من أحد الفقرتين السابقتين)

i. n odd $\Longrightarrow n = 2a+1, a \in \mathbb{Z},$

$\Longrightarrow n(n+1) = (2a+1)(2a+2) = 4a^2 + 6a + 2 = 2(2a^2 + 3a + 1)$

ii. n even $\Longrightarrow n = 2a, a \in \mathbb{Z},$

$\Longrightarrow n(n+1) = (2a)(2a+1) = 4a^2 + 2a = 2(2a^2 + a)$

٤. أثبت أن مربع أي عدد صحيح فردي يكتب على الشكل $8k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

ليكن $n \in \mathbb{Z}$ عدد فردي

$\Longrightarrow n = 2a+1, a \in \mathbb{Z},$

$\Longrightarrow n^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 4(a^2 + a) + 1 = 4\big(a(a+1)\big) + 1$

و لكن من الفقرة السابقة فإن حاصل ضرب عددين متتاليين هو عدد زوجي، إذاً $a(a+1) = 2k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow n^2 = 4\big(a(a+1)\big) + 1 = 4(2k) + 1 = 8k + 1$

السؤال الثالث:

١. وضح كيفية استخدام البرهان بالتطابق العكسي.

لنفرض أننا بصدد إثبات الصيغة الرياضية التالية: لتكن $x \in S$ ، إذا كان $P(x)$ فإن $Q(x)$

فيكون المطلوب إثبات أن $\neg Q(x) \Longrightarrow \neg P(x)$ و بالتالي نستخدم البرهان المباشر لإثبات:

لتكن $x \in S$ ، إذا كان $\neg Q(x)$ فإن $\neg P(x)$

٢. لتكن $x \in \mathbb{Z}$ ، إذا كان $5x - 7$ زوجي فإن x فردي. (أثبت ذلك).

باستخدام التطابق العكسي فيكفي إثبات أن: " إذا كان x زوجي فإن $5x - 7$ فردي. "

عندئذ ليكن x زوجي، إذاً

$$x = 2a\,, \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 5x - 7 &= 5(2a) - 7 \\ &= 10a - 7 \\ &= 2(5a - 4) + 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 5x - 7 \text{ is odd.}$$

٣. لتكن $x \in \mathbb{Z}$ ، أثبت أن x عدد زوجي إذا و فقط إذا كان x^2 زوجي.

" $\Leftarrow$ " ليكن x عدد زوجي إذاً $a \in \mathbb{Z}$ ، $x = 2a$

$$\Longrightarrow x^2 = (2a)^2 = 4a^2 = 2(2a^2)$$

" $\Rightarrow$ " ليكن x^2 زوجي و المطلوب إثبات أن x عدد زوجي و باستخدام التطابق العكسي فيكفي إثبات

أنه إذا كان x عدداً صحيحاً فردياً فإن x^2 فردي. و هذا مثبت في السؤال الأول

السؤال الرابع:

١. أثبت أو فنّد أنه لأي عدد صحيح فردي موجب n فإن $3|(n^2-1)$.

لتكن $n=3$ فإن $n^2-1=3^2-1=9-1=8$ و هذا لا يقبل القسمة على 3

و بالتالي العبارة غير صحيحة

٢. برهن أنه لإثبات صيغة رياضية معينة $\wp$ حيث: $\wp: \forall x \in S, P(x) \Longrightarrow Q(x)$ يكفي أن نثبت أن: $\neg\wp \Longrightarrow (C \wedge \neg C)$.

إثبات الصيغة $\wp$ أو إثبات أن $\neg\wp \Longrightarrow (C \wedge \neg C)$ يحققان نفس الغرض فهما متكافئان منطقياً لأن:

$\wp$	C	$\neg\wp$	$C \wedge \neg C$	$\neg\wp \Longrightarrow (C \wedge \neg C)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

٣. إذا كان $a,b \in \mathbb{Z}$ بحيث أن a زوجي و b فردي، فأثبت أن: $4 \nmid (a^2+2b^2)$

نفرض بالتناقض أن $4|(a^2+2b^2)$ و بما أن a زوجي فإن $a=2k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$4|(a^2+2b^2) \Longrightarrow a^2+2b^2=4n,\ \ n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow a^2+2b^2=4n \Longrightarrow (2k)^2+2b^2=4n \Longrightarrow 4k^2+2b^2=4n$

$\Longrightarrow 2b^2=4n-4k^2 \Longrightarrow b^2=2(n-k^2)$

و هذا يؤدي إلى أن b^2 عدد زوجي و بالتالي b زوجي و هذا يناقض المعطى بأن b فردي

و بالتالي الفرض بأن $4|(a^2+2b^2)$ خاطئ، إذاً $4 \nmid (a^2+2b^2)$