تفاضل وتكامل ٢

طرق التكامل :-

مشتقة الضرب $d(u.v) = u\,dv + v\,du$

تكامل $\Rightarrow \int d(u.v) = \int u\,dv + \int v\,du$

$$u.v = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}$$

ملاحظة : التكامل بالتجزيء يستخدم لحساب تكامل حاصل ضرب المشتقتين حيث احدهما وتكامل الاخرى وغالباً نشتق الدالة التي تنتهي بمعرفة تكامل الاخرى

مثال :-

[1] $\int x \sin x \, dx$

تكامل		تفاضل
$\sin x$	$+$	x
$-\cos x$	$-$	1
$-\sin x$	$+$	0

$= -x\cos x + \sin x - \int 0\,dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

طريقة (٢)

$\int \underset{u}{x} \, \underbrace{\sin x \, dx}_{dv}$

$dv = \sin x \, dx \quad , \quad u = x$

↓ تكامل   تفاضل

$v = \int \sin x \, dx = -\cos x \quad , \quad du = dx \qquad \frac{du}{dx} = 1$

$\therefore \int \underset{u}{x} \, \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} = -x \cos x - \int (\underset{v}{-\cos x}) \cdot \underset{du}{dx} =$

$= -x \cos x + \sin x + C$

تذكير :

1. $\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)} \right] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

2. $\int e^{\overset{\text{الأس}}{f(x)}} \cdot \overset{\text{مشتقة}}{f'(x)} \, dx = e^{\overset{\text{الأس}}{f(x)}} + C$

3. $\frac{d}{dx}\left[e^{ax} \right] = e^{ax} \cdot a = a e^{ax}$

- $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} \int e^{ax} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \, e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

مثال٤ :. احسب $\int x^2 e^x \, dx$

تفاضل		تكامل
x^2	$+$	e^x
$2x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0	$-$	e^x

$$\int x^2 e^x = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x - \int 0 \, dx$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$$

مثال٣ :. احسب $\int e^x \sin x \, dx$

تفاضل		تكامل
e^x	$+$	$\sin x$
e^x	$-$	$-\cos x$
e^x	$+$	$-\sin x$

نقل

$$\int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x + \int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = -\frac{1}{2}\left[-e^x \cos x + e^x \sin x\right]$$

لو عكسنا

نقل

تفاضل		تكامل
$\sin x$	$+$	e^x
$\cos x$	$-$	e^x
$-\sin x$	$+$	e^x

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = -\frac{1}{2}\left[e^x \sin x - e^x \cos x\right] + C$$

[redacted] تذكير :

① $\frac{d}{dx}\left[\underbrace{\operatorname{Ln} f(x)}_{}\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}$ الدالة ، $f'(x) \to$ مشتقه الداله ، $f(x) \to$ الداله

② $\int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}} \, dx = \operatorname{Ln}\left|\text{المقام}\right| + C$

مثال٤ : احسب

$$\int \operatorname{Ln} x \, dx$$

$$= \int \operatorname{Ln} x \cdot 1 \, dx$$

تفاضل		تكامل
$\operatorname{Ln} x$	$+$	1
$\frac{1}{x}$	$-$	x

$$x \operatorname{Ln} x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \operatorname{Ln} x - x + C$$

ملاحظة

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

امثله :- احسب قيمه التكاملات التالية

① $\int e^{3x} \cdot \cos 2x \, dx$

تفاضل	تكامل
e^{3x}	$\cos 2x$
$3e^{3x}$	$\frac{1}{2}\sin 2x$
$9e^{3x}$	$-\frac{1}{4}\cos 2x$

نقل

$$\therefore \int e^{3x}\cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x + \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{3x}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4}\int e^{3x}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x$$

اضرب $\frac{4}{13}$ الطرفين

$$\Rightarrow \int e^{3x}\cos 2x \, dx = \frac{4}{13}\left[\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\cos 2x\right]$$

لو عكسنا سنحصل على نفس الشي

تفاضل	تكامل
$\cos 2x$	e^{3x}
$-2\sin 2x$	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$-4\cos 2x$	$\frac{1}{9}e^{3x}$

ونكمل بنفس الطريقة السابقة :.

تذكير :-

① $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1} \underbrace{f(x)}_{\text{الزاوية}}\right] = \frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{مشتقة الزاوية}}}{1+\underbrace{[f(x)]^2}_{[\text{الزاوية}]^2}}$

② $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = \tan^{-1} f(x) + C$

$$\int \frac{\text{مشتقه الداله}}{1+[\text{الداله}]^2} dx = \tan^{-1} \text{الداله} + C$$

③ $\frac{d}{dx}\left[\ln f(x)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}$

④ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

مثال٢ :- احسب قيمه التكامل

$$\int \tan^{-1}x \, dx = \int 1 \cdot \tan^{-1}x \, dx$$

تفاضل		تكامل
$\tan^{-1}x$	$+$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	$-$	x

$$\therefore \int \tan^{-1}x \, dx = x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2}$$

مشتقة المقام $2x$

هامش

$$x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

المقام

③ $\int x^4 e^{2x}\, dx$

تفاضل		تكامل
x^4	$+$	e^{2x}
$4x^3$	$-$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$12x^2$	$+$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$24x$	$-$	$\frac{1}{8}e^{2x}$
24	$+$	$\frac{1}{16}e^{2x}$
0	$-$	$\frac{1}{32}e^{2x}$

$$= \frac{1}{2}x^4 e^{2x} - 4\cdot\frac{1}{4}x^3 e^{2x} + \frac{12}{8}x^2 e^{2x} - \frac{24}{16}x e^{2x} + \frac{24}{32}e^{2x}$$

$$- \int 0\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^4 e^{2x} - x^3 e^{2x} + \frac{3}{2}x^2 e^{2x} - \frac{3}{2}x e^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + C$$

تذكير :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

⇐ قاعدة الحساب $\int \cos^m x\, dx$ و $\int \sin^m x\, dx$

① $\int \sin^m x\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x$

② $\int \cos^m x\, dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x\, dx$

هامش:

$\sin^m x = [\sin x]^m$

M عدد طبيعي

Generated by CamScanner from intsig.com

الاثباتات

① $\int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} \sin x$

تكامل		تفاضل
$\sin x$	$+$	$\sin^{m-1} x$
$-\cos x$	$-$	$(m-1)\sin^{m-2} x \cos x$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x + \int (m-1) \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ $\Longrightarrow$

$$\int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x - (m-1) \int \sin^m x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^m x \, dx + (m-1) \int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x$$

$m \int \sin x^m - \int \sin x^m$

$m \int \sin x^m \, dx$

نقسم على m

$$\Longrightarrow \int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{(m-1)}{m} \int \sin^{m-2} x$$

و هو المطلوب

② اثبات ② بنفس الطريقة حيث $\int \cos^m x \, dx = \int \cos^{m-1} \cos x$

تمرين	تكامل	تفاضل
	$\cos$	$\cos^{m-1} x$

ملاحظة ؟ تطبيق القاعدة التكرارية $\int \sin^m x$ عدة مرات

ملاحظه :
بتطبيق القاعدة التكراريه لـ $\int \sin^m x\, dx$ عدة مرات ننتهي بأحد التكاملين التاليين

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ او $\int \sin^0 x\, dx = \int 1\, dx = x + C$

وايضاً تكرار تطبيق قاعدة $\int \cos^m x\, dx$ ننتهي بأحد التكاملين

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ او $\int \cos^0 x\, dx = \int 1\, dx = x + C$

والامثله التاليه توضح ذلك.

عدد طبيعي

علاقه تكرار الحساب $\int \sin^m x\, dx$, $\int \cos^m x\, dx$, $m \in N$

① $\int \sin^m x\, dx = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\, dx$

② $\int \cos^m x\, dx = \frac{1}{m}\cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} x\, dx$

امثله : احسب التكاملات التاليه :

① $\int \sin^4 x\, dx =$

$m=4$

$\rightarrow \int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx \rightarrow (1)$

$m=2$

$\rightarrow \int \sin^2 x = -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int \sin^0 x\, dx$

$= -\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + C \rightarrow (2)$

بتعويض 2 في 1 نجد ان

$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x\right] + C$

نفس $\int \sin = -\cos$

② $\int \sin^5 x \, dx$

$$\xrightarrow{} \int \sin^5 x \, dx \overset{n=5}{=} -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x \, dx \longrightarrow ①$$

$$\xrightarrow{} \int \sin^3 x \, dx \overset{n=3}{=} -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin^1 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C \longrightarrow ②$$

نعوض ① في * نحصل على :

$$\int \sin^5 x \, dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x \cos x + \frac{4}{5}\left[-\frac{1}{3}\,\frac{\sin^2 x \cos x}{\cancel{\cos x}} - \frac{2}{3}\cos x\right] + C$$

③ $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$

$$\int \cos^5 x \, dx \overset{n=5}{=} \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x \, dx \longrightarrow *$$

$$\int \cos^3 x \, dx \overset{n=3}{=} \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos^1 x \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C \longrightarrow **$$

نعوض ** في * :

$$\therefore \int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left[\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x\right] + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx = \left[\frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{3}{2}\sin x\right)\right]_0^{\pi/2}$$

$\sin \pi/2 = 1$	$\left(0 + \frac{4}{5}\left(0 + \frac{2}{3}\times 1\right)\right) - \underbrace{\left(0 + \frac{4}{5}(0+0)\right)}_{0}$
$\cos \pi/2 = 0$	$\frac{4}{5} * \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$
$\sin 0 = 0$	
$\cos 0 = 1$	

ملاحظة مهمة :

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

$\sin ax \cdot \cos bx$

حساب التكاملات التي تأخذ الصور التالية :

① $\int \sin ax \cos bx \, dx$ ② $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$ ③ $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$

نستخدم القواعد التالية

فرق الزوايا — مجموع الزوايا

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x\right]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x\right]$$

أمثلة : احسب التكاملات التالية :

① $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$

فرق الزوايا — مجموع الزوايا

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(-2x) + \sin(8x)\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$$

② $\int \sin x \sin 3x \, dx$

فرق الزوايا — مجموع الزوايا

$$\frac{1}{2}\int\left[\cos(-2x) - \cos(4x)\right]dx$$

$$\frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx$$

$$\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

③ $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$ تمرين

تذكير :-

① $\int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx$

② $\int \cos^m x \, dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx$

ملاحظة :- غير مهمة »

m اعداد صحيحة موجبة

يمكن حساب التكاملات $\int \sin^n x \, dx$ و $\int \cos^m x \, dx$ بطريقة اخرى

← اذا كان m فردياً نعزل $\sin x$ او $\cos x$ ونستخدم القانون

$\cos^2 = 1 - \sin x^2$ و $\sin x^2 = 1 - \cos^2 x$

$\int \sin^{2k+1} x \, dx = \int \sin^{2k} x \cdot \underbrace{\sin x}_{\text{العزل}} \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx$

$\int \cos^{2k+1} x \, dx \Rightarrow \int \cos^{2k} x \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{العزل}} \, dx = \int (1 - \sin x^2)^k \cos x \, dx$

← اذا كان m زوجي موجب $(m = 2k)$ نستخدم

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

حفظ قانون ضعف الزاوية

$\int \cos^{2k} x \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^k dx$ (زوجي)

$\int \sin^{2k} x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k$ (زوجي)

حساب التكاملات التي على الصورة :-

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$. حيث الأسس n, m موجبة

لدينا ثلاث حالات :

[1] اذا كان اس $\sin x$ فردياً فانه نعزل $\sin x$ ونستخدم القانون اي ان $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \cos^n x \, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k \cdot \sin x \cos^n x \, dx$$

[2] اذا كان اس $\cos x$ فردياً فانه نعزل $\cos x$ ونستخدم العلاقة اي ان $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \, (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx$$

[3] اذا كان اس $\sin x$ زوجيا واس $\cos x$ زوجيين نستخدم علاقة نصف الزاوية

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

اي ان

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2k} x \, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k \, dx$$

امثلة :- اوجد التكاملات التالية:

① $\int \underline{\sin^5 x} \cdot \cos^2 x \, dx = \int \underline{\underline{\sin^4 x}} \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

الاس الفردي

بعزل $\sin x$ واستخدام

$\sin^2 x = 1 - \cos^2$

$= \int (\sin x^2)^2 \cdot \sin x \cos x^2$

$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \cos^2 x \, dx$

$\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \underline{\sin x \cos^2 x}$

$\int \cancel{\sin} \cos^2 x \sin x - 2\int \cos^4 x \sin x \, dx + \int \cos^6 x \sin x \, dx$

$-\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$

$$\boxed{\int (\text{الدالة})^n \cdot \text{مشتقة الدالة} \, dx = \frac{(\text{الدالة})^{n+1}}{n+1} + C}$$

② $\int \sin^2 x \underset{\text{فردية}}{\underline{\cos^3 x}}\, dx = \int \sin^2 x \cdot \underline{\cos^2 x \cdot \cos x}\, dx$

اعزل $\cos x$ واستخدم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\rightarrow (1-\sin^2 x)\sin^2 x \cos x$

$= \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\cdot \cos x\, dx$

$= \int \sin^2 x \cos x\, dx - \int \sin^4 x \cos x\, dx$

$= \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$

③ $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \sin^2 \cdot (\cos^2 x)^2$

الاس زوجيه قوانينا ضعف الزاويه

$= \int \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\,(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)$

$\dfrac{1}{8}\int 1 + \underline{2\cos 2x} + \cos^2 2x - \underline{\cos 2x} - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x$

$\dfrac{1}{8}\left[\int 1\, dx + \int \cos 2x\, dx - \underset{*}{\int \cos^2 2x\, dx} - \underset{**}{\int \cos^3 2x\, dx}\right.$

~~نحسب التكاملين ** و *~~

~~نفرض 2x = y ... dy~~

$\dfrac{1}{8}\left[x + \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos y \sin y - \dfrac{1}{4}y - \dfrac{1}{6}\cos^2 y \sin y - \dfrac{2}{6}\sin y + C\right.$

نحسب التكاملين * , **

نضع $y = 2x \Leftarrow dy = 2\,dx \Leftarrow \frac{dy}{2} = dx$

$$* = \int \cos^2 2x\,dx = \int \cos^2 y\,\frac{dy}{2} = \frac{1}{2}\int \cos^2 y\,dy$$

$m=2$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos y \sin y + \frac{1}{2}\int \cos^0 y\,dy\right.$$

$$= \frac{1}{4}\cos y \sin y + \frac{1}{4} y$$

$$** \quad \int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^3 y\,dy$$

$m=3$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\cos^2 y \sin y + \frac{2}{3}\int \cos y\,dy\right.$$

$$\frac{1}{6}\cos^2 y \sin y + \frac{2}{6}\sin y + C$$

الرجوع الى الجواب النهائي

≡ طريقة تكرار الحساب. التكامل $\int \sec^m x \, dx$ حيث m عدد صحيح موجب

① $$\int \sec \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

حفظ

② $$\int \sec^m x \, dx = \frac{1}{m-1} \sec^{m-2} x \tan x + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} x \, dx$$

$m \geq 2$

اثبات ① :

اضرب بالبسط والمقام في $\sec + \tan$

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x * \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$\int \frac{\sec^2 x + \sec \tan x}{\sec + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

اثبات ② :

$$\int \sec^m x \, dx = \int \sec^{m-2} x \sec^2 x \, dx$$

تفاضل	تكامل
$\sec^{m-2} x$	$\sec^2 x$

نكمل بالتجزئة

مثال : احسب $\int \sec^4 x \, dx$

$m = 4$

$$\int \sec^4 x \, dx = \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx$$

$$\frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \tan x + C$$

$\int \sec^2 x = \tan x$

$\int \sec x \tan x = \sec x$

$\int \sec^m x \tan^n x \, dx$ حساب التكاملات على الصورة

حيث m, n اعداد صحيحة موجبة

تذكير :- $\boxed{1+\tan^2 x = \sec^2 x}$

لدينا ثلاث حالات :-

الحالة الاولى :- اذا كان اس $\sec x$ زوجي فانه نعزل $\sec^2 x$ و نستخدم القاعدة

$\sec^2 x = 1+\tan^2 x$ $(\sec^2)^k$

$$*\int \sec^{2k+2} x \tan^n x \, dx = \int \sec^{2k} x . \sec^2 x (\tan^n x) \, dx$$

$$= \int (1+\tan^2 x)^k . \sec^2 x \tan^n x \, dx$$

(2) اذا كان اس $\sec x$ فردي واس $\tan x$ فردي نعزل $\sec x . \tan x$ ونستخدم القاعدة

$\tan^2 x = \sec^2 - 1$

$$*\int \sec^{2k+1} x \tan^{2j+1} x \, dx = \int \sec^{2k} x \underbrace{\tan^{2j} x}_{(\tan^2)^j} . \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{نعزل}}$$

$$\int \sec^{2k} x (\sec^2 - 1)^j . \sec x \tan x$$

③ اذا كان اس $\tan x$ زوجيا

نستخدم القاعدة $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

المقصود من تكاملات $\int \sec^m dx$

$$\int \sec^m x \, \tan^{2k} dx = \int \sec^m x \, (\sec^2 x - 1)^k \, dx$$

$(\tan^2)^k$

امثلة احسب التكاملات التالية :

اس sec زوجي الحالة الاولى

① $\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$

$= \int \sec^2 x \cdot \underbrace{\cancel{\sec^2 x}}_{\text{المشتقة}} \cdot \tan^3 x \, dx$ $\quad \sec^2 x$

$\int (1+\tan^2 x) \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{\text{المشتقة}} \tan^3 x$

$\int \tan^3 x \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{\text{المشتقة}} \, dx + \int \tan^5 x \, \underbrace{\sec^2 x}_{\text{المشتقة}} \, dx$

$= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$